31η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση 12 ερωτημάτων

Η συναρτησιακή σχέση $f^3(x)+f(x)+1=x$

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)+1=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
δ) Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια:

i) Χρησιμοποιώντας ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ να βρείτε την αντίστροφή της.

ii) Χωρίς χρήση του ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ να βρείτε την αντίστροφή της.

στ) Να βρείτε τα σημεία τομής και την σχετική θέση των C_f και $C_{f^{-1}}$.

ζ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f^{-1}(x_0+h)-f(x_0)+f^{-1}(x_0-h)}{h}=-f'(x_0)-2\left(f^{-1}\right)'(x_0)$.

η) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)}{f^{-1}(x)+x}$.

θ) Να δείξετε ότι $|f(x)-f(y)|\le|x-y|\le\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

ι) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)+\xi=0$.

κ) Να βρείτε το $f(1)$ και να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx<\dfrac{1}{2}$.

Νίκος Τούντας

Λύση

Ονομάζουμε (Α) την αρχική σχέση $f^3(x)+f(x)+1=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιοδήποτε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$

Στην δοσμένη σχέση για x το x_0: $f^3(x_0)+f(x_0)+1=x_0$ (Β)

$$(A)-(B)\Rightarrow f^3(x)+f(x)+1-f^3(x_0)-f(x_0)-1=x-x_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x-x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right]=x-x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\qquad(\Gamma)$$

Γιατί $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1=0$ τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα $\Delta=f^2(x_0)-4f^2(x_0)-4=-3f^2(x_0)-4<0$ άρα δεν έχει ρίζες.

Για $x\neq x_0$: $(\Gamma)\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\right|\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{\left|x-x_0\right|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+\right|}\leq\left|x-x_0\right|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\left|x-x_0\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq\left|x-x_0\right|$$

Και από κριτήριο παρεμβολής εύκολα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$ για οποιοδήποτε $x_0\in\mathbb{R}$.

Από το ερώτημα α) έχουμε φτάσει στην σχέση (Γ) $f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\overset{x\neq x_0}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{x\neq x_0}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\overset{f:\text{Συνεχής}}{=}\frac{1}{3f^2(x_0)+1}\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

γ) 1ος τρόπος: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f^3(x_1) \geq f^3(x_2) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^3(x_1) + f(x_1) + 1 \geq f^3(x_2) + f(x_2) + 1 \overset{\text{Από (A)}}{\Rightarrow} x_1 \geq x_2 \quad \text{Άτοπο}$$

Άρα είναι γνησίως αύξουσα.

3ος τρόπος:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \overset{\text{Από (A)}}{\Rightarrow} f^3(x_1) + f(x_1) + 1 < f^3(x_2) + f(x_2) + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2) \quad (3)$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}$ η οποία πολύ εύκολα δείχνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Άρα έχουμε $(3) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

4ος τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \overset{\text{Από (A)}}{\Rightarrow} f^3(x_1) + f(x_1) + 1 < f^3(x_2) + f(x_2) + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) - f^3(x_2) + f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x_1) - f(x_2)\right]\left[f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)\right] + f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x_1) - f(x_2)\right]\left[f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1\right] < 0 \quad (4)$$

Το τριώνυμο $f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1$ έχει $\Delta = -3f^2(x_2) - 4 < 0$ άρα έχουμε ότι $f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1 > 0$ άρα λόγω της (4) είναι: $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R}$

δ) 1ος τρόπος: Θέτω $h(x) = x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$ αποδεικνύεται εύκολα ότι η h είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ θέτουμε: $x = y^3 + y + 1$ και από την δοσμένη σχέση προκύπτει:

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + 1 = y^3 + y + 1 \Leftrightarrow h(f(x)) = h(y) \overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = y$$

Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x = y^3 + y + 1$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Επομένως είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ θέτουμε: $x = y^3 + y + 1$ και από την δοσμένη σχέση προκύπτει:

$$f^3(x) + f(x) + 1 = x \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + \cancel{1} = y^3 + y + \cancel{1} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = y^3 + y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^3(x) - y^3 + f(x) - y = 0 \Leftrightarrow (f(x) - y)(f^2(x) + yf(x) + y^2) + f(x) - y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - y)(f^2(x) + yf(x) + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) - y = 0 \quad \text{ή} \quad f^2(x) + yf(x) + y^2 + 1 = 0$$

Το $f^2(x) + yf(x) + y^2 + 1$ είναι τριώνυμο ως προς f(x) με διακρίνουσα $\Delta = y^2 - 4y^2 - 4 = -3y^2 - 4 < 0$ άρα $f^2(x) + yf(x) + y^2 + 1 > 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Επομένως προκύπτει $f(x) = y$, άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x = y^3 + y + 1$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Επομένως είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

ε) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται:

1ος τρόπος: Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1)=f(x_2) & (5) \\ f^3(x_1)+1=f^3(x_2)+1 & (6) \end{cases} \overset{(5)+(6)}{\Rightarrow} f^3(x_1)+f(x_1)+1=f^3(x_2)+f(x_2)+1 \overset{\text{Από (A)}}{\Rightarrow} x_1=x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $y\in\mathbb{R}$: Θέτω $y=f(x) \overset{\text{Από (A)}}{\Rightarrow} y^3+y+1=x$ άρα $f^{-1}(x)=x^3+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Θέτω $h(x)=x^3+x+1, x\in\mathbb{R}$ αποδεικνύεται εύκολα ότι η h είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Η h συνεχής και γνησίως αύξουσα και σύνολο τιμών το $h(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x), \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=\mathbb{R}$

Από αρχική σχέση προκύπτει:

$h(f(x))=x \Rightarrow h^{-1}(h(f(x)))=h^{-1}(x) \Rightarrow h^{-1}(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού $D_f=D_{h^{-1}}=\mathbb{R}$ τότε οι h^{-1}, f είναι ίσες.

Η h^{-1} είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη της h άρα και η f είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την f^{-1} που ισούται με την αντίστροφη της h^{-1} δηλαδή την h.

Άρα $f^{-1}(x)=\left(h^{-1}\right)^{-1}(x)=h(x)=x^3+x+1,\ x\in\mathbb{R}$

στ) Για κάθε $x\in D_f\cap D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ είναι:

$f^{-1}(x)<x \Leftrightarrow x^3+x+1<x \Leftrightarrow x^3<-1 \Leftrightarrow x<-1$ άρα λόγω συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων ως προς την ευθεία $y=x$ θα είναι $f^{-1}(x)<x<f(x)$ στο $(-\infty,-1)$

$f^{-1}(x)>x \Leftrightarrow x^3+x+1>x \Leftrightarrow x^3>-1 \Leftrightarrow x>-1$ άρα λόγω συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων ως προς την ευθεία $y=x$ θα είναι $f(x)<x<f^{-1}(x)$ στο $(-1,+\infty)$

Άρα $f(x)\neq f^{-1}(x)$ στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Είναι $f^{-1}(-1)=-1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(-1)\right)=f(-1) \Leftrightarrow f(-1)=-1$ άρα η $x=-1$ είναι ρίζα της εξίσωσης. Άρα οι C_f, $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A(-1,-1)$.

ζ) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-h)-f^{-1}(x_0+h)-f(x_0)+f^{-1}(x_0-h)}{h}=$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)-f^{-1}(x_0+h)+f^{-1}(x_0)+f^{-1}(x_0-h)-f^{-1}(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x_0-h)-f(xo)}{h}-\frac{f^{-1}(xo+h)-f^{-1}(x_0)}{h}+\frac{f^{-1}(x_0-h)-f^{-1}(x_0)}{h}\right)=-f'(x_0)-2\left(f^{-1}\right)'(x_0)$$

Γιατί ισχύουν τα εξής:

- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \underset{\omega\to0}{\overset{-h=\omega}{=}} \lim\limits_{\omega\to0}\left(-\dfrac{f(x_0+\omega)-f(x_0)}{\omega}\right)=-f'(x_0)$
- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^{-1}(x_0+h)-f^{-1}(x_0)}{h}=\left(f^{-1}\right)'(x_0)$

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^{-1}(x_0-h)-f^{-1}(x_0)}{h} \underset{\omega\to 0}{\overset{-h=\omega}{=}} \lim\limits_{\omega\to 0}\left(-\dfrac{f^{-1}(x_0+\omega)-f^{-1}(x_0)}{\omega}\right)=-\left(f^{-1}\right)'(x_0)$

η) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)}{f^{-1}(x)+x}$

Θέτω $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u) \Leftrightarrow x=u^3+u+1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=f^{-1}\left(u^3+u+1\right)$

Είναι $\lim\limits_{u\to+\infty} f^{-1}(u)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(u^3+u+1\right)=+\infty$ άρα όταν $x\to+\infty$ τότε $f^{-1}(u)\to+\infty$ άρα $u\to+\infty$.

Επομένως $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)}{f^{-1}(x)+x}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3}{f^{-1}\left(u^3+u+1\right)+\left(u^3+u+1\right)}=$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{\left(u^3+u+1\right)^3+\left(u^3+u+1\right)+1+\left(u^3+u+1\right)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{\cancel{3}}}{u^{\cancel{9}}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u^6}=0$$

θ) $\begin{cases} f^{-1}(x)=x^3+x+1 \\ f^{-1}(y)=y^3+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=x^3+x+1 & (M) \\ -f^{-1}(y)=-y^3-y-1 & (N) \end{cases}$

Προσθέτουμε τις (Μ) και (Ν) κατά μέλη και έχουμε:

$f^{-1}(x)-f^{-1}(y)=x^3-y^3+x-y+1-1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)-f^{-1}(y)=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+x-y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x)-f^{-1}(y)=(x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right) \Rightarrow \left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|=\left|(x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right)\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|=|x-y|\left|x^2+xy+y^2+1\right| \quad (K)$

Το τριώνυμο x^2+xy+y^2 έχει διακρίνουσα $\Delta=-3y^2\le 0$ άρα είναι $x^2+xy+y^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+xy+y^2+1\ge 1$

Άρα επειδή $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\ge 0$, $|x-y|\ge 0$, $x^2+xy+y^2+1\ge 1$ και λόγω της (Κ) είναι:

$$\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\ge|x-y| \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \quad (\Sigma)$$

Στην (Σ) για x το $f(x)$ και για y το $f(y)$ είναι:

$$\left|f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(y))\right|\ge|f(x)-f(y)| \Leftrightarrow |f(x)-f(y)|\le|x-y|$$

Άρα τελικά $|f(x)-f(y)|\le|x-y|\le\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Σχόλιο: Μπορούμε στο ερώτημα γ) να αποδείξουμε αρχικά την σχέση του θ) ερωτήματος και στη συνεχεία αφού $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$ για y το xo είναι: $|f(x)-f(xo)|\le|x-xo| \Leftrightarrow -|x-xo|\le|f(x)-f(xo)|\le|x-xo|$ από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to xo}\left(f(x)-f(xo)\right)=0$. Άρα η f είναι συνεχής.

ι) 1^ος^ τρόπος: $f(x)+x=0 \Leftrightarrow f(x)=-x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=f^{-1}(-x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-x^3-x+1 \Leftrightarrow x^3+2x-1=0$

Έστω η συνάρτηση $n(x)=x^3+2x-1$, $x\in[0,1]$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Είναι $n(0)=-1<0$ και $n(1)=2>0$ άρα $n(0)n(1)<0$ επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $n(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi^3+2\xi-1=0 \Leftrightarrow f(\xi)+\xi=0$

2^ος^ τρόπος: Έστω η συνάρτηση $k(x)=f(x)+x$, $x\in[0,1]$ η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $k(0)=f(0)<0$ γιατί είναι $f(0)=f\left(f^{-1}(x_1)\right)=x_1$ με x_1 την ρίζα της $f^{-1}(x)=0$.
Η f^{-1} έχει σύνολο τιμών το $D_f=\mathbb{R}$ άρα υπάρχει σίγουρα η x_1.
Επίσης είναι για $x\geq 0 \overset{f^{-1}\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x)\geq f^{-1}(0)=1>0$ άρα η $x_1<0$. (Η f^{-1} δείχνεται εύκολα ότι είναι γνησίως αύξουσα) . Επίσης είναι $k(1)=f(1)+1=f\left(f^{-1}(0)\right)+1=0+1=1>0$
Άρα τελικά είναι $k(0)k(1)<0$ επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $k(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)+\xi=0$.

κ) Στην (Α) για $x=1$ είναι: $f^3(1)+f(1)=0\Leftrightarrow f(1)\left[f^2(1)+1\right]=0 \overset{f^2(1)+1>0}{\Leftrightarrow} f(1)=0$

Είναι $f^3(x)+f(x)+1=x\Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+1\right]=x-1 \overset{f^2(x)+1>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\dfrac{x-1}{f^2(x)+1}\leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$ γιατί $f^2(x)\geq 0\Leftrightarrow f^2(x)+1\geq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Επομένως
$\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1(x-1)dx=\left[\dfrac{(x-1)^2}{2}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}$