42η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sqrt{x}+\left(1-x\right)\sqrt{1-x} & , x\in\left(0,1\right) \\ 1 & , x=0 \text{ ή } x=1 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τις ασύμπτωτες.

δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f στα $x_1=0$ και $x_2=1$. Στη συνέχεια να τις χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων με την C_f .

ε) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες του προηγούμενου ερωτήματος σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ ισοσκελές τρίγωνο εμβαδού $E=\frac{1}{24}$ τετραγωνικές μονάδες.

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξύ C_f , των αξόνων και της ευθείας $x=1$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως σύνθεση, άθροισμα και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1=f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα η f είναι συνεχής.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}+\dfrac{(1-x)\sqrt{1-x}-1}{x}\right)=-\dfrac{3}{2}$ γιατί

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1-x)\sqrt{1-x}-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{-\sqrt{1-x}-\dfrac{1-x}{2\sqrt{1-x}}}{1}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}-\sqrt{1-x}\right)=\dfrac{3}{2}$ γιατί

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Για $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{1-x}-\dfrac{1-x}{2\sqrt{1-x}}=$

$$=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}^{\cancel{2}}}{2\cancel{\sqrt{x}}}-\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{1-x}^{\cancel{2}}}{2\cancel{\sqrt{1-x}}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{1-x}}{2}=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)$$

Είναι $f'(x)\ge0\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)\ge0\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\ge0\Leftrightarrow\sqrt{x}\ge\sqrt{1-x}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{2}$

Άρα για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ είναι $f'(x)>0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ είναι $f\searrow\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ και $f\nearrow\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ και $x=1$ το $f(0)=f(1)=1$ και ολικό ελάχιστο για $x=\dfrac{1}{2}$ το

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f''(x)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)>0$ και η f είναι συνεχής στο $[0,1]$

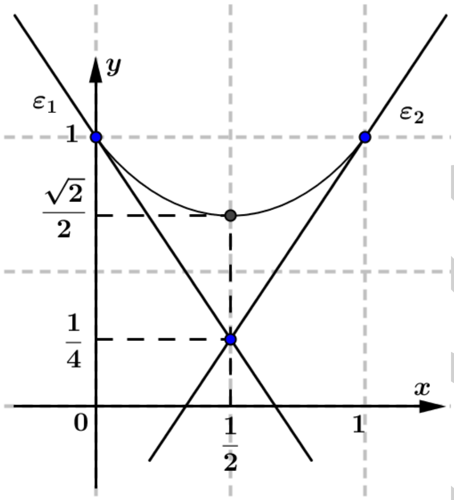
άρα η f είναι κυρτή στο $[0,1]$.

Η f δεν ορίζεται σε περιοχή του $\pm\infty$ άρα δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες. Επίσης η f συνεχής στο $[0,1]$ άρα δεν έχει και κατακόρυφες ασύμπτωτες.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1=0$ είναι η ευθεία: $(\varepsilon_1): y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+1$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_2 = 1$ είναι η ευθεία: $(\varepsilon_2): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Είναι $-\frac{3}{2}x + 1 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ και $y = \frac{3}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ άρα οι δύο εφαπτομένες τέμνονται στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.



ε) Οι προσκείμενες στην βάση γωνίες του τριγώνου είναι ίσες αφού $\varepsilon\varphi\omega_1 = \frac{3}{2}$ και $\varepsilon\varphi\omega_2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(\pi - \omega_3) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_3 = \frac{3}{2}$ με ω_1, ω_2 να είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1, ε_2 αντίστοιχα με τον άξονα x΄x και ω_1, ω_3 να είναι οι προσκείμενες στην βάση του τριγώνου γωνίες. Επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Είναι $-\frac{3}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ άρα η ε_1 τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ και $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ άρα η ε_2 τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Επομένως το τρίγωνο έχει βάση $\beta = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ και ύψος $\upsilon = \frac{1}{4}$.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{24}$.

στ) $E(\lambda) = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}\right) dx =$

$$= \int_9^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + (1-x)^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$$