4η Άσκηση

2020-2021

Έως την αντίστροφη συνάρτηση

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f\left(e^{\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2}\right)-1\le \ln x\le f(x)+2\sqrt{\ln x}-1 \text{ , για κάθε } x\in[1,+\infty).$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\left(\sqrt{\ln x}-1\right)^2,\ x\ge 1$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε την θέση του ολικού ακροτάτου της.

γ) Να εκφράσετε την f ως σύνθεση τεσσάρων συναρτήσεων, δείχνοντας αναλυτικά ολόκληρη την διαδικασία.

δ) Να ορίσετε την συνάρτηση $b\left((x-2)^2\right)$ με $b(x)=f\left(e^x\right)$.

ε) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x+\lambda & , x<4 \\ b\left((x-2)^2\right) & , x\ge 4 \end{cases}$ να αντιστρέφεται.

στ) Για $\lambda=-2$ να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της g.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Για κάθε $x \in [1,+\infty)$ έχουμε:

$$\ln x \le f(x) + 2\sqrt{\ln x} - 1 \Leftrightarrow f(x) \ge \ln x - 2\sqrt{\ln x} + 1 \Leftrightarrow f(x) \ge \left(\sqrt{\ln x} - 1\right)^2 \quad (1)$$

$f\left(e^{\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2}\right) - 1 \le \ln x \quad (2)$ Θέτουμε $e^{\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2} = u \overset{u>0}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2 = \ln u \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{\ln x+1}+1\right| = \sqrt{\ln u} \overset{\sqrt{\ln x+1}+1\ge 1}{\Leftrightarrow} \sqrt{\ln x+1}+1 = \sqrt{\ln u} \Leftrightarrow \sqrt{\ln x+1} = \sqrt{\ln u} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 = \left(\sqrt{\ln u} - 1\right)^2 \Leftrightarrow \ln x = \left(\sqrt{\ln u} - 1\right)^2 - 1$$

Άρα η (2) γίνεται $f(u) - 1 \le \left(\sqrt{\ln u} - 1\right)^2 - 1 \Leftrightarrow f(u) \le \left(\sqrt{\ln u} - 1\right)^2$ και για u το x: $f(x) \le \left(\sqrt{\ln x} - 1\right)^2 \quad (3)$

Από τις (1) και (3) έχουμε: $f(x) = \left(\sqrt{\ln x} - 1\right)^2,\ x \ge 1$

β) Ισχύει $\sqrt{\ln x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x} > 1 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$ και $\sqrt{\ln x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x} < 1 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 1 \le x < e$ και επίσης $\sqrt{\ln x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x} = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Για κάθε $x_1, x_2 \ge 1$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \overset{x_1,x_2\ge 1}{\Rightarrow} \sqrt{\ln x_1} < \sqrt{\ln x_2} \Rightarrow \sqrt{\ln x_1} - 1 < \sqrt{\ln x_2} - 1 \quad (4)$

Αν $1 \le x_1 < x_2 \le e$ τότε $(4) \Rightarrow \left(\sqrt{\ln x_1} - 1\right)^2 > \left(\sqrt{\ln x_2} - 1\right)^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow [1,e]$

Αν $e \le x_1 < x_2$ τότε $(4) \Rightarrow \left(\sqrt{\ln x_1} - 1\right)^2 < \left(\sqrt{\ln x_2} - 1\right)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [e,+\infty)$

Τώρα θα αναζητήσουμε τα ακρότατα της f:

1ος τρόπος: Για κάθε $x \ge 1$ ισχύει $\left(\sqrt{\ln x} - 1\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge f(e)$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = e$ το $f(e) = 0$

2ος τρόπος: Για κάθε $1 \le x \le e \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(1) \ge f(x) \ge f(e) \Leftrightarrow 0 = f(e) \le f(x) \le f(1)$ και για κάθε $x \ge e \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \ge f(e) = 0$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = e$ το $f(e) = 0$.

γ) $f(x) = \left(\sqrt{\ln x} - 1\right)^2,\ x \ge 1$

Έστω $g(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ τότε ορίζεται η σύνθεσή τους $g \circ h$ με πεδίο ορισμού και τύπο: $D_{g\circ h} = \left\{x \in D_h \,/\, h(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 1 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$ και

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = (x-1)^2,\ x \in \mathbb{R}$$

Έστω τώρα και η συνάρτηση $v(x) = \sqrt{x},\ x \ge 0$ τότε ορίζεται $(g \circ h) \circ v$ με πεδίο ορισμού και τύπο: $D_{(g\circ h)\circ v} = \left\{x \in D_v \,/\, v(x) \in D_{g\circ h}\right\} = \left\{x \ge 0 \,/\, \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = [0,+\infty)$ και

$$((g \circ h) \circ v)(x) = (g \circ h)(v(x)) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2,\ x \ge 0$$

Τέλος έστω και η συνάρτηση $k(x)=\ln x$, $x>0$ τότε ορίζεται $((g\circ h)\circ v)\circ k$ με πεδίο ορισμού

και τύπο: $D_{((g\circ h)\circ v)\circ k}=\left\{x\in D_k \,/\, k(x)\in D_{(g\circ h)\circ v}\right\}=\{x>0\,/\,\ln x\ge 0\}=\{x>0\,/\,x\ge 1\}=[1,+\infty)$

$$\left[((g\circ h)\circ v)\circ k\right](x)=((g\circ h)\circ v)(k(x))=\left(\sqrt{\ln x}-1\right)^2 \text{ , } x\ge 0$$

δ) $D_{b(x)}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x\ge 1\right\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\ge 0\}=[0,+\infty)$ και ισχύει

$$b(x)=f\left(e^x\right)=\left(\sqrt{\ln e^x}-1\right)^2=\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \text{ , } x\ge 0$$

Πρέπει $\begin{cases}(x-2)^2\in D_{b(x)}\\ b(x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2\ge 0\\ b(x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow x\ge 0$ Άρα $D_{b\left((x-1)^2\right)}=[0,+\infty)$

$$b\left((x-1)^2\right)=\left(\sqrt{(x-1)^2}-1\right)^2=\left(|x-1|-1\right)^2=\begin{cases}x^2 & ,0\le x<1\\ (x-2)^2 & , x\ge 1\end{cases}$$

ε) $g(x)=\begin{cases}x+\lambda & , x<2\\ b\left((x-1)^2\right) & , x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}x+\lambda & , x<2\\ (x-2)^2 & , x\ge 2\end{cases}$

Θα δείξουμε αρχικά ότι η g είναι 1-1 σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $[2,+\infty)$.

1ος τρόπος:

Για κάθε $x_1,x_2<2$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1+\lambda<x_2+\lambda\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow$ άρα η g είναι 1-1 στο διάστημα $(-\infty,2)$.

Για κάθε $x_1,x_2\ge 2$ με $2\le x_1<x_2\Rightarrow 0\le x_1-2<x_2-2\Rightarrow (x_1-2)^2<(x_2-2)^2\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow$ άρα η g είναι 1-1 στο διάστημα $[2,+\infty)$.

2ος τρόπος:

Για κάθε $x_1,x_2<2$ με $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1+\lambda=x_2+\lambda\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η g 1-1 στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\ge 2$ με $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow (x_1-2)^2=(x_2-2)^2\Rightarrow |x_1-2|=|x_2-2| \overset{x_1,x_2\ge 2}{\Rightarrow}$

$\overset{x_1,x_2\ge 2}{\Rightarrow} x_1-2=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η g 1-1 στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Για $x<2\Leftrightarrow x+\lambda<\lambda+2\Leftrightarrow g(x)<\lambda+2$ και για $x\ge 2\Leftrightarrow x-2\ge 0\Leftrightarrow (x-2)^2\ge 0\Leftrightarrow g(x)\ge 0$

Άρα αν $g((-\infty,2))=(-\infty,\lambda+2)$ και $g([2,+\infty))=[0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε στοιχείο y_1 του συνόλου $g((-\infty,2))$ και για κάθε στοιχείο y_2 του συνόλου $g([2,+\infty))$ οι εξισώσεις $g(x)=y_1$ και $g(x)=y_2$ έχουν ακριβώς μία λύση ως προς x.

Για να είναι 1-1 σε όλο το πεδίο ορισμού της η g πρέπει για κάθε y του συνόλου τιμών της g, η εξίσωση $g(x)=y$ να έχει ακριβώς μία λύση. Αυτό ισχύει αν ισχύει σε καθένα από τα $g((-\infty,2))$ και $g([2,+\infty))$, που το δείξαμε παραπάνω και επίσης σε όλο το σύνολο τιμών $g(\mathbb{R})=g((-\infty,2))\cup g([2,+\infty))$.

Επομένως πρέπει να ισχύει επιπλέον $g((-\infty,2))\cap g([2,+\infty))=\varnothing$ άρα $\lambda+2\le 0\Leftrightarrow\lambda\le -2$

στ) Έχουμε $g(x)=\begin{cases} x-2 & ,x<2 \\ (x-2)^2 & ,x\ge 2 \end{cases}$ και προφανώς αφού $\lambda=-2\le 0$ η g αντιστρέφεται σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Για $x<2$: $y=g(x)\Leftrightarrow y=x-2\Leftrightarrow x=y+2$, $y+2<2\Leftrightarrow y<0$ άρα $g^{-1}(y)=y+2$, $y<0$ άρα τελικά $g^{-1}(x)=x+2$, $x<0$

Για $x\ge 2$: $y=g(x)\Leftrightarrow y=(x-2)^2\overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow}|x-2|=\sqrt{y}\overset{x\ge 2}{\Leftrightarrow}x-2=\sqrt{y}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{y}+2$, $\sqrt{y}+2\ge 2\Leftrightarrow \sqrt{y}\ge 0\Leftrightarrow y\ge 0$ άρα $g^{-1}(y)=\sqrt{y}+2$, $y\ge 0$ άρα τελικά έχουμε: $g^{-1}(x)=\sqrt{x}+2$, $x\ge 0$

Άρα τελικά $g^{-1}(x)=\begin{cases} x+2 & ,x<0 \\ \sqrt{x}+2 & ,x\ge 0 \end{cases}$