

## 2η Άσκηση Γ' ΕΠΑΛ

2020-2021

Έως τη γραφική παράσταση συνάρτησης

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f : A \rightarrow [0, 2\pi]$  και  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$   
του διπλανού σχήματος με τύπους:

$$f(x) = 2\eta\mu x - 1, \quad x \in [0, 2\pi] \text{ και}$$

$$g(x) = \sqrt{3 - |x|} + \frac{1}{|x| - 2}, \quad x \in B.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$   
χωρίς χρήση του σχήματος.

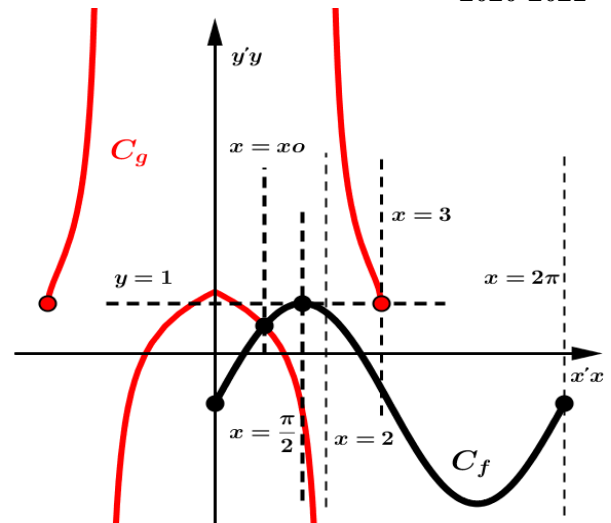
β) Να ορίσετε την συνάρτηση  $R = \frac{1}{f}$ .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$ , η γραφική παράσταση  
της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$  και για ποιες  
κάτω.

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

ε) Να λύσετε τις ανισώσεις: **i.**  $f(x) > g(x)$  **ii.**  $f(x) < g(x)$ .

στ) Να λύσετε την ανίσωση  $f^2(x) - f(x)g(x) > f(x) - g(x)$ .



Στέλιος Μιχαήλογλου – Ευάγγελος Τόλης – Νίκος Τούντας



Ασκησόπολις  
ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

## Λύση

α) Για την συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{3-|x|} + \frac{1}{|x|-2}$ ,  $x \in B$  έχουμε τους εξής περιορισμούς:

$$\text{Πρέπει: } \begin{cases} 3-|x| \geq 0 \\ \text{και} \\ |x|-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 3 \\ \text{και} \\ |x| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ \text{και} \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3]$$

Άρα τελικά  $B = [-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3]$ .

β) Για το πεδίο ορισμού της  $R = \frac{1}{f}$  έχουμε τους εξής περιορισμούς:

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x \in [0, 2\pi] \\ \text{και} \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, 2\pi] \\ \text{και} \\ 2\eta\mu x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, 2\pi] \\ \text{και} \\ \eta\mu x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, 2\pi] \\ \text{και} \\ \eta\mu x \neq \eta\mu \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, 2\pi] \\ \text{και} \\ x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x \neq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, 2\pi] \\ \text{και} \\ x \neq \frac{\pi}{6} \text{ ή } x \neq \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$$

Άρα η  $R = \frac{1}{f}$  έχει πεδίο ορισμού το  $\Gamma = \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

Έχουμε  $R(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2\eta\mu x - 1}$ ,  $x \in \Gamma$ .

γ) Η  $f$  σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα αν λύσουμε την  $f(x) = 0$  στο  $[0, 2\pi]$  προκύπτει

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{6}, \text{ άρα η γραφική παράσταση της } f \text{ τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στα σημεία } M\left(\frac{\pi}{6}, 0\right), N\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right).$$

Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$  για

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right] \text{ και πάνω από τον άξονα } x'x \text{ για } x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

δ) Με βάση το σχήμα, οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  τέμνονται σε μοναδικό σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $x = x_0$  άρα η εξίσωση  $f(x) = g(x)$  έχει λύση την  $x = x_0$ .

ε) Με βάση το σχήμα έχουμε ότι:  $g(x) > f(x) \Leftrightarrow x \in [0, x_0) \cup (2, 3]$  και επίσης  $g(x) < f(x) \Leftrightarrow x \in (x_0, 2)$ .

$$\begin{aligned} \sigma\tau) f^2(x) - f(x)g(x) > f(x) - g(x) &\Leftrightarrow f^2(x) - f(x)g(x) - f(x) + g(x) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^2(x) - f(x) + g(x) - f(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)[f(x) - 1] - g(x)[f(x) - 1] > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [f(x) - 1][f(x) - g(x)] > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) - 1 > 0 \text{ και } f(x) - g(x) > 0 \text{ (A) ή } f(x) - 1 < 0 \text{ και } f(x) - g(x) < 0 \text{ (B)} \end{aligned}$$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ \text{και} \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \text{ Αδύνατη} \\ \text{και} \\ x \in (x_0, 2) \end{cases} \Leftrightarrow H(A) \text{ Αδύνατη καθώς από το σχήμα φαίνεται ότι η}$$

γραφική παράσταση της  $f$  δεν βρίσκεται ποτέ πάνω από την  $y = 1$  και λύνουμε την  $f(x) > g(x)$  με βάση το προηγούμενο ερώτημα.

$$(B) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 1 \\ \text{και} \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \\ \text{και} \\ x \in [0, x_0) \cup (2, 3] \end{cases} \text{ καθώς η γραφική παράσταση της } f \text{ τέμνει την } y = 1 \text{ μόνο}$$

για  $x = \pi/2$  με βάση το σχήμα και από προηγούμενο ερώτημα λύνουμε την  $f(x) < g(x)$ .

Τώρα από το σχήμα βλέπουμε  $x_0 < \frac{\pi}{2}$  άρα τελικά η (B) έχει λύση:  $x \in [0, x_0) \cup (2, 3]$

