38η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1-\ln x)$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $\ln\frac{e^{x-1}}{x}=e^{\lambda}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε αριθμό $\alpha\in\mathbb{N}$, τέτοιον ώστε η εξίσωση $x-\ln x=2$ να έχει μοναδική ρίζα στο $(\alpha,\alpha+1)$.

δ) Η ρίζα της εξίσωσης $x-\ln x=2$ βρίσκεται πιο κοντά στο α ή στο $\alpha+1$;

ε) Αν ρ_1,ρ_2 οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\rho_1}^{\beta} f(x)dx<\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx-\int_{4}^{\rho_2} f(x)dx \text{ με } \rho_1<\beta<\gamma<1<\rho_2.$$

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}}{x-1-\ln x}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x-1-\ln x}$$

Για κάθε $x>0$ είναι $\ln x\le x-1\Leftrightarrow x-1-\ln x\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$.

Άρα για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $x-1-\ln x>0$

Είναι $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x-1-\ln x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\ge 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ άρα $f\searrow(0,1)$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ άρα $f\nearrow(1,+\infty)$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $\frac{e^{x-1}}{x}>0\Leftrightarrow x>0$.

Για $x=1$ είναι $\ln 1=e^{\lambda}\Leftrightarrow e^{\lambda}=0$ αδύνατη.

Για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι: $\ln\frac{e^{x-1}}{x}=e^{\lambda}\Leftrightarrow \ln\frac{e^x}{ex}=e^{\lambda}\Leftrightarrow \ln e^x-\ln(ex)=e^{\lambda}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\ln e-\ln x=e^{\lambda}\Leftrightarrow x-1-\ln x=e^{\lambda}\Leftrightarrow \ln(x-1-\ln x)=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$ και $f\searrow(0,1)$ άρα: $f((0,1))=\left(\lim\limits_{x\to 1^-}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=\mathbb{R}$ γιατί

- $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(x-1-\ln x)\underset{u\to 0^+}{\overset{x-1-\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x-1-\ln x)\underset{u\to +\infty}{\overset{x-1-\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$

Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ και $f\nearrow(1,+\infty)$ άρα: $f((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 1^+}f(x),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$ γιατί

- $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x-1-\ln x)\underset{u\to 0^+}{\overset{x-1-\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x-1-\ln x)\underset{u\to +\infty}{\overset{x-1-\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-1-\ln x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln e^x-\ln x-1)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\frac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$

Επομένως η εξίσωση $\ln\frac{e^{x-1}}{x}=e^{\lambda}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες (μία στο $(0,1)$ και μία στο $(1,+\infty)$) για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

γ) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x>0$.

Για $x=1$ είναι $1=2$ αδύνατη.

Για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι: $x-\ln x=2\Leftrightarrow x-1-\ln x=1\Leftrightarrow \ln(x-1-\ln x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$

- Είναι $f(2)=\ln(1-\ln 2)<0$ γιατί $1-\ln 2<1$
- Είναι $f(3)=\ln(2-\ln 3)<0$ γιατί $2-\ln 3<1 \Leftrightarrow \ln 3>1 \Leftrightarrow 3>e$ ισχύει
- Είναι $f(4)=\ln(3-\ln 4)>0$ γιατί $3-\ln 4>1 \Leftrightarrow \ln 4<2 \Leftrightarrow 4<e^2$ ισχύει

Η f είναι συνεχής στο $[3,4]$ και $f(3)f(4)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho_1 \in (3,4)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1)=0$.

Επειδή $f \nearrow (1,+\infty)$ το ρ_1 είναι μοναδικό. Άρα $\alpha=3$.

δ) $f\left(\frac{7}{2}\right)=\ln\left(\frac{5}{2}-\ln\frac{7}{2}\right)>0$ γιατί $\frac{5}{2}-\ln\frac{7}{2}>1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}>\ln\frac{7}{2} \Leftrightarrow \sqrt{e^3}>\frac{7}{2} \Leftrightarrow e^3>\frac{49}{4}$ ισχύει γιατί $e^3 \simeq 20$ και $\frac{49}{4}=12,25$

Άρα λόγω του προηγούμενο ερωτήματος που το ρ_1 είναι μοναδικό, από θεώρημα Bolzano θα είναι $\rho_1 \in \left(3,\frac{7}{2}\right)$ άρα είναι πιο κοντά στο $\alpha=3$.

ε) $\int_{\rho_1}^{\beta} f(x)dx < \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx - \int_{4}^{\rho_2} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{\rho_1}^{\beta} f(x)dx - \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx < -\int_{4}^{\rho_2} f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{\rho_1}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx < \int_{\rho_2}^{4} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{\rho_1}^{\gamma} f(x)dx < \int_{\rho_2}^{4} f(x)dx$

Για $\rho_1 < x < \gamma \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(x) < f(\rho_1)=0 \Rightarrow \int_{\rho_1}^{\gamma} f(x)dx < 0$

Για $\rho_2 < x < 4 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(\rho_2)=0 \Rightarrow \int_{\rho_2}^{4} f(x)dx > 0$

Άρα είναι $\int_{\rho_1}^{\gamma} f(x)dx < \int_{\rho_2}^{4} f(x)dx$.