9η Άσκηση Γ΄ ΕΠΑΛ

2020-2021

Κανόνες παραγώγισης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-x^2$.

α) Να βρείτε την f', την f'' και την $f^{(3)}$.

β) Να δείξετε ότι $(1-x)f''(x)+f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $P^{(3)}(x)=f^{(3)}(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $P(0)=1$, $P'(1)=10$ και $P''(4)=3$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και τον βαθμό του πολυωνύμου.

δ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x^2+\lambda x+1$, $x\in\mathbb{R}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ και ισχύει $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h-1)-2+\lambda}{h}=f(0)$.
Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$.

ε) Να ορίσετε την συνάρτηση $R=\dfrac{f}{g}$.

στ) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $h(x^3+5x)=R(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε το $h'(6)$.

ζ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $k(x)=\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}+R(x)-\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου – Ευάγγελος Τόλης – Νίκος Τούντας

Λύση

α) Η $f(x)=2x-x^2$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=2-2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f^{(3)}(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) $(1-x)f''(x)+f'(x)=(1-x)(-2)+2-2x=-2+2x+2-2x=0$

γ) $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$

Είναι $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Είναι $P''(x)=6\alpha x+2\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Είναι $P^{(3)}(x)=6\alpha$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $P^{(3)}(x)=f^{(3)}(x)\Leftrightarrow 6\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$ και $P(0)=1\Leftrightarrow\delta=1$

Είναι $P'(1)=10\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta+\gamma=10\Leftrightarrow 2\beta+\gamma=10$ (1)

Έχουμε $P''(4)=3\Leftrightarrow 24\alpha+\beta=3\Leftrightarrow\beta=3$ άρα από την (1) είναι $6+\gamma=10\Leftrightarrow\gamma=4$

Άρα τελικά $P(x)=3x^2+4x+1$, $x\in\mathbb{R}$ και είναι πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού.

δ) $g(x)=x^2+\lambda x+1$, $x\in\mathbb{R}$ και $g'(x)=2x+\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Είναι $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(h-1)-2+\lambda}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=g'(-1)=-2+\lambda$

Άρα αφού $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(h-1)-2+\lambda}{h}=f(0)\Leftrightarrow -2+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=2$

Άρα είναι $g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$, $x\in\mathbb{R}$

ε) Είναι $D_f=D_g=\mathbb{R}$. Πρέπει επίσης $g(x)\neq0\Leftrightarrow(x+1)^2\neq0\Leftrightarrow x+1\neq0\Leftrightarrow x\neq-1$.

Άρα η συνάρτηση $R=\dfrac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Είναι $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-x^2}{(x+1)^2}$, $x\neq-1$

στ) $h(x^3+5x)=R(x)\Leftrightarrow h(x^3+5x)=\dfrac{2x-x^2}{(x+1)^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Είναι $\left[h(x^3+5x)\right]'=\left(\dfrac{2x-x^2}{(x+1)^2}\right)'\Leftrightarrow h'(x^3+5x)\cdot(x^3+5x)'=\dfrac{(2x-x^2)'(x+1)^2-(2x-x^2)\left[(x+1)^2\right]'}{(x+1)^4}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h'(x^3+5x)\cdot(3x^2+5)=\frac{(2-2x)(x+1)^2-(2x-x^2)2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x^3+5x)\cdot(3x^2+5)=\frac{(2-2x)(x+1)^2-(2x-x^2)2(x+1)}{(x+1)^4}$$

Για $x=1$ είναι $h'(6)\cdot8=\dfrac{(2-2)(1+1)^2-(2-1)2(1+1)}{(1+1)^4}\Leftrightarrow h'(6)\cdot8=\dfrac{-4}{16}\Leftrightarrow h'(6)\cdot8=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow h'(6)=-\dfrac{1}{32}$

ζ) $k(x)=\sqrt[3]{\eta\mu x}+f(x)-\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)=(\eta\mu x)^{\frac{1}{3}}+f(x)-\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $k'(x)=\left[(\eta\mu x)^{\frac{1}{3}}+f(x)-\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\left((\eta\mu x)^{\frac{1}{3}}\right)'+f'(x)-\left[\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=$

$=\frac{1}{3}(\eta\mu x)^{\frac{1}{3}-1}(\sigma\upsilon\nu x)+2-2x-\left[-\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\right]=$

$=\frac{1}{3}(\eta\mu x)^{-\frac{2}{3}}(\sigma\upsilon\nu x)+2-2x+\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3(\eta\mu x)^{\frac{2}{3}}}+2-2x+\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}\right)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}=$

$=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3\sqrt[3]{\eta\mu^2 x}}+2-2x+\frac{x\cdot\eta\mu\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$