1η Άσκηση

2022-2023

Έως την σύνθεση συνάρτησης (Παράγραφος 1.2)

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $(f\circ g)(x)=x-\sqrt{x}$ για κάθε $x\geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $g(x)=e^{x-\sqrt{x}}$, $x\geq 0$.

β) Να ορίσετε την g ως σύνθεση τριών συναρτήσεων, δείχνοντας αναλυτικά ολόκληρη την διαδικασία.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες:

i) Η γραφική παράσταση της $f\circ g$ είναι μη αρνητική.

ii) Η γραφική παράσταση της $f\circ g$ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

δ) Έστω η συνάρτηση $V(x)=\frac{1}{\mu}\ln\left(x^{\lambda}\right)$ με $\mu,\lambda\in[2,4]$ φυσικοί αριθμοί.

Αν οι $f=V$ τότε να βρείτε τους αριθμούς μ και λ .

ε) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{1}{f}$, $\sqrt{f}$, $f(|x|)$ και $f\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

στ) Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $|f|$, $f(|x|)$ και $f\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

ζ) Έστω το σημείο Μ το οποίο ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το Μ, τις προβολές του πάνω στους άξονες και την αρχή των αξόνων δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=|x\ln x|$, $x>0$, κάνοντας την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Για κάθε $x \ge 0$ είναι $(f \circ g)(x) = x - \sqrt{x} \Leftrightarrow f(g(x)) = x - \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln g(x) = x - \sqrt{x} \Leftrightarrow g(x) = e^{x-\sqrt{x}}$

β) Έστω οι συναρτήσεις $h(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \ge 0$ και $k(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Αρχικά θα ορίσουμε την $h \circ \varphi$. Πρέπει $\begin{cases} x \in D_\varphi \\ \varphi(x) \in D_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$ άρα η $h \circ \varphi$ έχει πεδίο ορισμού το $D_{h\circ\varphi} = [0, +\infty)$ και είναι $(h \circ \varphi)(x) = h(\varphi(x)) = \varphi^2(x) - \varphi(x) = \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} = x - \sqrt{x}$, $x \ge 0$.

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την $k \circ (h \circ \varphi)$. Πρέπει $\begin{cases} x \in D_{h\circ\varphi} \\ (h \circ \varphi)(x) \in D_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (h \circ \varphi)(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$ άρα η $k \circ (h \circ \varphi)$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και είναι $(k \circ (h \circ \varphi))(x) = k((h \circ \varphi)(x)) = e^{(h\circ\varphi)(x)} = e^{x-\sqrt{x}}$, $x \ge 0$.

Άρα η g ορίζεται ως η $k \circ (h \circ \varphi)$.

γ) i) Πρέπει $(f \circ g)(x) \ge 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \ge 0$

1ος τρόπος: $x - \sqrt{x} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \ge 0$

Είναι $\sqrt{x} \ge 0$ για κάθε $x \ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$.

Είναι $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ και $\sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$

Προκύπτει ο διπλανός πίνακας:

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$\sqrt{x}$	+	+	+
$\sqrt{x} - 1$	--	--	+
$\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)$	--	--	+

Άρα $\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \ge 0 \Leftrightarrow x \in [1. +\infty) \cup \{0\}$

2ος τρόπος: $x - \sqrt{x} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \le x \overset{x \ge 0}{\Leftrightarrow} x \le x^2 \Leftrightarrow x(x-1) \ge 0$ και ομοίως με πινακάκι βρίσκουμε ίδιο αποτέλεσμα.

ii) Για να βρίσκεται η C_f στο 1ο τεταρτημόριο πρέπει $x > 0$ και $(f \circ g)(x) > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$ άρα τελικά πρέπει $x > 1$.

δ) Αρχικά για να είναι $f = V$ πρέπει να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

Για την V πρέπει $x^\lambda > 0$. Αν λ άρτιος τότε $x^\lambda > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$ ενώ αν λ περιττός τότε $x^\lambda > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Επομένως πρέπει ο λ περιττός και $\lambda \in [2, 4]$ και είναι φυσικός άρα $\lambda = 3$.

Επίσης πρέπει για κάθε $x > 0$ να είναι $f(x) = V(x) \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{\mu}\ln\left(x^3\right) \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{\mu}\ln x \Leftrightarrow \frac{3}{\mu} = 1 \Leftrightarrow \mu = 3$.

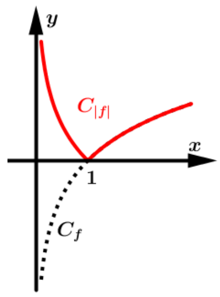
ε) Για να ορίζεται η $\frac{1}{f}$ πρέπει $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ άρα η $\frac{1}{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,1) \cup (1,+\infty)$ και είναι $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Για να ορίζεται η $\sqrt{f}$ πρέπει $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ άρα η $\sqrt{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $[1,+\infty)$ και είναι $\left(\sqrt{f}\right)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ln x}$, $x \geq 1$.

Για να ορίζεται η $f(|x|)$ πρέπει $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |x| \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |x| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$ άρα η $f(|x|)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι $f(|x|) = \ln|x| = \begin{cases} \ln(-x) \ , \ x < 0 \\ \ln x \quad , \ x > 0 \end{cases}$.

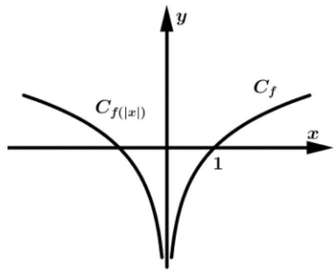
Για να ορίζεται η $f\left(\frac{1}{|x|}\right)$ πρέπει $\begin{cases} |x| \neq 0 \\ \frac{1}{|x|} \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$ άρα η $f\left(\frac{1}{|x|}\right)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι $f\left(\frac{1}{|x|}\right) = \ln\frac{1}{|x|} = \ln 1 - \ln|x| = -\ln|x| = \begin{cases} -\ln(-x) \ , \ x < 0 \\ -\ln x \quad , \ x > 0 \end{cases}$.

στ) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά των σημείων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.



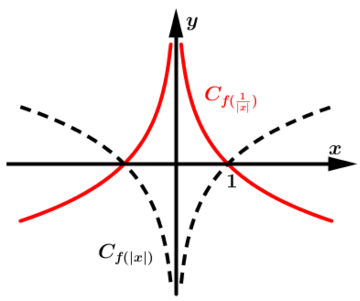
Είναι $f(|x|) = \begin{cases} \ln(-x) \ , \ x < 0 \\ \ln x \quad , \ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x) \ , \ x < 0 \\ f(x) \ , \ x > 0 \end{cases}$.

Άρα η γραφική παράσταση της $f(|x|)$ αποτελείται από την γραφική παράσταση της f και την συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y.

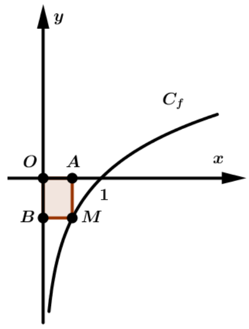


Είναι $f\left(\frac{1}{|x|}\right) = \begin{cases} -\ln(-x) \ , \ x < 0 \\ -\ln x \quad , \ x > 0 \end{cases} = -f(|x|)$

Άρα η γραφική παράσταση της $f\left(\frac{1}{|x|}\right)$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(|x|)$ ως προς τον άξονα x΄x.

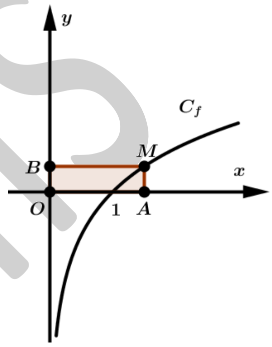


ζ) Το σημείο M είναι $M(x,f(x)) \equiv M(x,\ln x)$ και οι προβολές του πάνω στους άξονες είναι τα σημεία $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$.



- Αν $0<x<1$ τότε $\ln x<0$ και είναι:

$$E_{OAMB}=(OA)(OB)=|x||\ln x|=x(-\ln x)=-x\ln x$$



- Αν $x>1$ τότε $\ln x>0$ και είναι:

$$E_{OAMB}=(OA)(OB)=|x||\ln x|=x\ln x$$

Άρα είναι $E(x)=|x\ln x|$, $x>0$.