1η Άσκηση Γ΄ ΕΠΑΛ

2020-2021

Έως τη γραφική παράσταση συνάρτησης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^4-(\mu+\nu)x^2+\mu\nu}$ με $\mu,\nu\in\mathbb{R}$ και $0<\mu<\nu$.

Έστω και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^3+\lambda x-2\lambda}{x^2-2\lambda x+\lambda+2}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\left(-\infty,-\sqrt{\nu}\right]\cup\left[-\sqrt{\mu},\sqrt{\mu}\right]\cup\left[\sqrt{\nu},+\infty\right)$.

β) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ) Αν $f(0)=2$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $M(1,0)$ να βρείτε τα $\mu,\nu\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι $\lambda=0$, $\mu=1$ και $\nu=4$.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g με τους άξονες.

ε) Να ορίσετε τις συναρτήσεις: **i.** $h=\sqrt{g}$ **ii.** $w=\dfrac{1}{g}$ **iii.** $b=f^2$

στ) Να ορίσετε την συνάρτηση $R=\dfrac{f}{g}$ και να δείξετε ότι $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)\sqrt{f^2(x)+7x^2}}{x^3}$.

ζ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(f(0),g(0)\right)$ και:

i. είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y=3x+2020$.

ii. είναι παράλληλη στην ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

iii. σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\hat{\omega}=150^\circ$.

Στέλιος Μιχαήλογλου – Ευάγγελος Τόλης – Νίκος Τούντας

Λύση

α) Για το πεδίο ορισμού της f προκύπτει ο εξής περιορισμός:

Πρέπει: $x^4-(\mu+\nu)x^2+\mu\nu\ge 0$ και θέτουμε $x^2=\omega\ge 0$ και έχουμε: $\omega^2-(\mu+\nu)\omega+\mu\nu\ge 0$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(\mu+\nu)^2-4\mu\nu=\mu^2+2\mu\nu+\nu^2-4\mu\nu=\mu^2-2\mu\nu+\nu^2=(\mu-\nu)^2>0$

γιατί $\mu<\nu$ άρα $\mu\ne\nu$ και δεν μπορεί να ισχύει $(\mu-\nu)^2=0$.

Επομένως το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις $\omega_{1,2}=\dfrac{\mu+\nu\pm\sqrt{(\mu-\nu)^2}}{2}=\dfrac{\mu+\nu\pm(\mu-\nu)}{2}=$

$$=\frac{\mu+\nu\pm(\mu-\nu)}{2}=\begin{cases}\dfrac{\mu+\nu-(\mu-\nu)}{2}=\dfrac{\mu+\nu-\mu+\nu}{2}=\dfrac{2\nu}{2}=\nu\\[2ex]\dfrac{\mu+\nu+(\mu-\nu)}{2}=\dfrac{\mu+\nu+\mu-\nu}{2}=\dfrac{2\mu}{2}=\mu\end{cases}$$

Άρα τελικά $\omega^2-(\mu+\nu)\omega+\mu\nu\ge 0\Leftrightarrow(\omega-\mu)(\omega-\nu)\ge 0$ και στο παρακάτω πινακάκι έχουμε το πρόσημό του και τις ρίζες του.

ω	$-\infty$		μ		ν		$+\infty$
$(\omega-\mu)(\omega-\nu)$		+	0	−	0	+	

Άρα τελικά $\omega\in(-\infty,\mu]\cup[\nu,+\infty)$ όμως ισχύει $x^2=\omega\ge 0$ άρα $\omega\in[0,\mu]\cup[\nu,+\infty)$.

$0\le\omega\le\mu\Leftrightarrow 0\le x^2\le\mu\Leftrightarrow\sqrt{x^2}\le\sqrt{\mu}\Leftrightarrow|x|\le\sqrt{\mu}\Leftrightarrow-\sqrt{\mu}\le x\le\sqrt{\mu}$ και επίσης

$\omega\ge\nu\Leftrightarrow x^2\ge\nu\Leftrightarrow\sqrt{x^2}\ge\sqrt{\nu}\Leftrightarrow|x|\ge\sqrt{\nu}\Leftrightarrow x\le-\sqrt{\nu}$ ή $x\ge\sqrt{\nu}$

Άρα τελικά $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\nu}\right]\cup\left[-\sqrt{\mu},\sqrt{\mu}\right]\cup\left[\sqrt{\nu},+\infty\right)$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\left(-\infty,-\sqrt{\nu}\right]\cup\left[-\sqrt{\mu},\sqrt{\mu}\right]\cup\left[\sqrt{\nu},+\infty\right)$.

β) Για το πεδίο ορισμού της g προκύπτει ο εξής περιορισμός:

Πρέπει $x^2-2\lambda x+\lambda+2\ne 0$ και επειδή η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τότε ο περιορισμός αυτός θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή το τριώνυμο δεν πρέπει να έχει ρίζα άρα πρέπει να έχει διακρίνουσα αρνητική. Ισχύει $\Delta=4\lambda^2-4(\lambda+2)=4\lambda^2-4\lambda-8=4(\lambda^2-\lambda-2)$.

Θα πρέπει $4(\lambda^2-\lambda-2)<0$. Προκύπτει νέο τριώνυμο με $\Delta_2=1+8=9$ και ρίζες

$\lambda_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{4}{2}=2\\[1ex]-\dfrac{2}{2}=-1\end{cases}$ και γίνεται $\lambda^2-\lambda-2<0\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda+1)<0$ με το πρόσημό του να φαίνεται στον διπλανό πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$4(\lambda^2-\lambda-2)$		+	0	−	0	+	

Άρα πρέπει $\lambda\in(-1,2)$ έτσι ώστε η g να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ) Έχουμε $f(0)=2\Leftrightarrow\sqrt{\mu\nu}=2\Leftrightarrow\sqrt{\mu\nu}^2=4\Leftrightarrow\mu\nu=4\quad(1)$

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $M(1,0)$ άρα

$f(1)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-(\mu+\nu)+\mu\nu}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-\mu-\nu+\mu\nu}=0\Leftrightarrow 1-\mu-\nu+\mu\nu=0\underset{\mu\nu=4}{\overset{\text{Από }(1)}{\Leftrightarrow}}$

$\Leftrightarrow 1-\mu-\nu+4=0\Leftrightarrow 5-\mu-\nu=0\Leftrightarrow\mu=5-\nu\quad(2)$

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu\nu=4\\ \mu=5-\nu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nu(5-\nu)=4\\ \mu=5-\nu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\nu^2+5\nu-4=0\\ \mu=5-\nu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nu^2-5\nu+4=0\\ \mu=5-\nu\end{cases} \Leftrightarrow$

$\overset{\Delta=25-16=9}{\Leftrightarrow} \left(\text{Έχει ρίζες } \nu_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\nu=4 \text{ ή } \nu=1\\ \mu=5-\nu\end{cases}$

Αν $\nu=4$ τότε από την (2) ισχύει $\mu=5-4=1$ δεκτή γιατί $\mu<\nu$

Αν $\nu=1$ τότε από την (2) ισχύει $\mu=5-1=4$ Απορρίπτεται γιατί $\mu>\nu$ ενώ πρέπει $\mu<\nu$

Τελικά η f γίνεται $f(x)=\sqrt{x^4-5x^2+4}$, $x\in A=(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$.

δ) Για $\lambda=0$ έχουμε $g(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ $f(0)=2$ και $g(0)=0$ άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,2)$ ενώ η γραφική παράσταση της g στο σημείο $O(0,0)$ (Προφανώς τέμνει και τον άξονα x΄x στο ίδιο σημείο αφού είναι η αρχή των αξόνων).

$f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^4-5x^2+4}=0\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0 \overset{\text{Από α) ερώτημα}}{\Leftrightarrow} x^2=\mu=1 \text{ ή } x^2=\nu=4\Leftrightarrow x=\pm1 \text{ ή } x=\pm2$

άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $B(1,0)$, $\Gamma(-1,0)$, $\Delta(2,0)$ και $E(-2,0)$.

ε) **i.** Η συνάρτηση $h=\sqrt{g}$ έχει τους εξής περιορισμούς.

- Πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της g δηλαδή $x\in\mathbb{R}$
- Πρέπει $g(x)\geq0\Leftrightarrow\frac{x^3}{x^2+2}\geq0 \overset{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} x^3\geq0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^3}\geq\sqrt[3]{0}\Leftrightarrow x\geq0$

Άρα τελικά η h έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και τύπο:

$$h(x)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\frac{x^3}{x^2+2}}=\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{\sqrt{x^3}}{x^2+2}=\frac{x\sqrt{x}}{x^2+2}\,,\ x\geq0$$

ii. Η συνάρτηση $w=\frac{1}{g}$ έχει τους εξής περιορισμούς:

- Πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της g δηλαδή $x\in\mathbb{R}$
- Πρέπει $g(x)\neq0\Leftrightarrow\frac{x^3}{x^2+2}\neq0\Leftrightarrow x^3\neq0\Leftrightarrow x\neq0$

Άρα τελικά η w έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με τύπο:

$$w(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{x^3}{x^2+2}}=\frac{x^2+2}{x^3}\,,\ x\neq0$$

iii. Η συνάρτηση $b=f^2=f\cdot f$ είναι το γινόμενο της f με τον εαυτό της και έχει πεδίο ορισμού το πεδίο ορισμού της f και τύπο: $b(x)=f^2(x)=\sqrt{x^4-5x^2+4}^{\,2}=x^4-5x^2+4$, $x\in(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$

στ) Έχουμε $B=A\cap\mathbb{R}=A=(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$

Για την συνάρτηση $R=\frac{f}{g}$ έχουμε τον εξής περιορισμό: Πρέπει $g(x)\neq0\Leftrightarrow\frac{x^3}{x^2+2}\neq0\Leftrightarrow x^3\neq0\Leftrightarrow x\neq0$

άρα τελικά θα ορίσουμε την $R=\frac{f}{g}$ στο διάστημα $(-\infty,-2]\cup[-1,0)\cup(0,1]\cup[2,+\infty)$.

Στο διάστημα $(-\infty,-2]\cup[-1,0)\cup(0,1]\cup[2,+\infty)$ έχουμε:

$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{\frac{x^3}{x^2+2}}=\frac{f(x)(x^2+2)}{x^3}=\frac{f(x)\sqrt{(x^2+2)^2}}{x^3}=$$

$$=\frac{f(x)\sqrt{x^4+2x^2+4}}{x^3}=\frac{f(x)\sqrt{x^4-5x^2+4+7x^2}}{x^3}=$$

$$=\frac{f(x)\sqrt{\sqrt{x^4-5x^2+4}^2+7x^2}}{x^3}=\frac{f(x)\sqrt{f^2(x)+7x^2}}{x^3}$$

Θυμηθείτε: $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

Επειδή το $x^2+2>0$:

$$\sqrt{(x^2+2)^2}=|x^2+2|=x^2+2$$

Γενικά αν ν άρτιος τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$

ενώ αν ν περιττός τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha$,

$\alpha>0$ με το $\nu\in\mathbb{N}$ και $\nu\geq 2$

ζ) Το σημείο $A(f(0),g(0))$ είναι το $A(2,0)$.

i. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$. Επειδή η ε είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y=3x+2020$ τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα $\alpha=3$. Άρα $\varepsilon: y=3x+\beta$. Επειδή διέρχεται από το $A(2,0)$ τότε για $x=2$ έχουμε $y=0$ άρα $0=6+\beta\Leftrightarrow\beta=-6$. Επομένως $\varepsilon: y=3x-6$.

ii. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$. Επειδή η ε είναι παράλληλη στην ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ δηλαδή στην $y=x$, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα $\alpha=1$. Επειδή διέρχεται από το $A(2,0)$ τότε για $x=2$ έχουμε $y=0$ άρα $0=1+\beta\Leftrightarrow\beta=-1$. Επομένως $\varepsilon: y=x-1$.

iii. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$. Επειδή η ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\hat{\omega}=150^\circ$ τότε

$\varepsilon\varphi\hat{\omega}=\alpha\Leftrightarrow\varepsilon\varphi150^\circ=\alpha\Leftrightarrow\varepsilon\varphi(180^\circ-30^\circ)=\alpha\Leftrightarrow-\varepsilon\varphi(30^\circ)=\alpha\Leftrightarrow\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Επειδή διέρχεται από

το $A(2,0)$ τότε για $x=2$ έχουμε $y=0$ άρα $0=-\frac{\sqrt{3}}{3}2+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Επομένως $\varepsilon: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.