2η Άσκηση

2022-2023

Έως την μονοτονία συνάρτησης

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln\left(\frac{3x-|x|-4}{2}(x^2-1)\right)-2\ln(x^2-1)$ και $g(x)=\ln\left[(x-2)^2\right]$.

α) Να εξετάσετε αν οι f,g είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες.

β) Να μελετήσετε τις f και g ως προς την μονοτονία.

γ) Αν $x>y>0$ τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i) $f(x^2+y^2+2)$ και $f\left[2(xy+1)\right]$

ii) $f(x^3+3xy^2+2)$ και $f(y^3+3x^2y+2)$

δ) Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ f$.

ε) Να λύσετε στο διάστημα $(e+2,+\infty)$ την ανίσωση $2\ln\left[\ln\frac{(x-2)^2}{e^2}\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right)$.

στ) Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $h(x)=|f(x)|$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς την απόλυτη τιμή.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει:

- $x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$ (1)
- $\dfrac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)>0$ (2)

Αν $x\le 0$ τότε: $(2)\Leftrightarrow \dfrac{3x+x-4}{2}\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow 2(x-1)\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+1)>0 \overset{(x-1)^2\ge 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+1>0 \\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow x>-1$

Δηλαδή $\dfrac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)>0$ για $x\in(-1,0]$.

Αν $x>0$ τότε: $(2)\Leftrightarrow \dfrac{3x-x-4}{2}\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow$

$=(x-2)\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$

x	$-\infty$ -1	1		2 $+\infty$
$x-2$	-	-	-	+
x^2-1	+	-	+	+
Γινόμενο	-	+	-	+

Δηλαδή $\dfrac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)>0$ για $(0,1)\cup(2,+\infty)$.

Επομένως τελικά είναι $(2)\Leftrightarrow \dfrac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$

Άρα για να ορίζεται η f πρέπει: $\begin{cases} x<-1 \text{ ή } x>1 \\ x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow x>2$

Για $x>2$ είναι $f(x)=2\ln\left(\dfrac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)\right)-2\ln\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=2\ln\left((x-2)\left(x^2-1\right)\right)-2\ln\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow f(x)=2\left[\ln\left((x-2)\left(x^2-1\right)\right)-\ln\left(x^2-1\right)\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=2\ln\left(\dfrac{(x-2)\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{x^2-1}}\right)\Leftrightarrow f(x)=2\ln(x-2)$, $x>2$

Για να ορίζεται η g πρέπει $(x-2)^2>0\Leftrightarrow x-2\ne 0\Leftrightarrow x\ne 2$ και είναι $g(x)=\ln\left[(x-2)^2\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)=2\ln|x-2|\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases} 2\ln(2-x), & x<2 \\ 2\ln(x-2), & x>2\end{cases}$

Οι f,g δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού άρα δεν είναι ίσες. Για κάθε $x>2$ ισχύει $f(x)=g(x)$ άρα το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες είναι το $(2,+\infty)$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $2<x_1<x_2$ είναι $0<x_1-2<x_2-2\Rightarrow \ln(x_1-2)<\ln(x_2-2)\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\ln(x_1-2)<2\ln(x_2-2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα οι f,g είναι γνησίως αύξουσες στο $(2,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,2)$ με $x_1<x_2<2$ είναι $-x_1>-x_2>-2\Rightarrow 2-x_1>2-x_2>0\Rightarrow$
$\Rightarrow \ln(2-x_1)<\ln(2-x_2)\Rightarrow 2\ln(2-x_1)<2\ln(2-x_2)\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2)$.

γ) i) Είναι για κάθε $x>y>0$: $(x-y)^2>0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2>0 \Leftrightarrow x^2+y^2>2xy \Leftrightarrow x^2+y^2+2>2(xy+1)$

Είναι $x>y>0$ άρα $x^2+y^2>0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2>2$ και $2xy>0 \Leftrightarrow 2xy+2>2 \Leftrightarrow 2(xy+1)>2$

Άρα $x^2+y^2+2>2(xy+1)>2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(x^2+y^2+2\right)>f\left[2(xy+1)\right]$

ii) Ισχύει $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3>0$ αφού $x>y>0$ άρα έχουμε:
$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3>0 \Leftrightarrow x^3+3xy^2>y^3+3x^2y \Leftrightarrow x^3+3xy^2+2>y^3+3x^2y+2 \quad (1)$

Επειδή $x>y>0$ τότε $x^3+3xy^2>0 \Leftrightarrow x^3+3xy^2+2>2$ και $y^3+3x^2y>0 \Leftrightarrow y^3+3x^2y+2>2$ άρα η (1) γίνεται: $x^3+3xy^2+2>y^3+3x^2y+2>2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^3+3xy^2+2\right)>f\left(y^3+3x^2y+2\right)$

δ) Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει $\begin{cases} x>2 \\ f(x)>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 2\ln(x-2)>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \ln(x-2)>1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x-2>e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>e+2 \end{cases} \Leftrightarrow x>e+2$ άρα η $f\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $(e+2,+\infty)$.

Για κάθε $x>e+2$ είναι $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=2\ln\left(f(x)-2\right)=2\ln\left(2\ln(x-2)-2\right)$

ε) Για κάθε $x>e+2$: $2\ln\left[\ln\dfrac{(x-2)^2}{e^2}\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \Leftrightarrow 2\ln\left[\ln\left(\dfrac{x-2}{e}\right)^2\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \overset{x>e+2>2}{\Leftrightarrow}$

$\overset{x>e+2>2}{\Leftrightarrow} 2\ln\left[2\ln\left(\dfrac{x-2}{e}\right)\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \overset{x>e+2>2}{\Leftrightarrow} 2\ln\left[2\left(\ln(x-2)-1\right)\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln\left[2\ln(x-2)-2\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \Leftrightarrow 2\ln\left[f(x)-2\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(f(x)\right)>f\left(\ln(e+1)^2\right) \underset{x>e+2>2}{\overset{f\nearrow(2,+\infty)}{\Leftrightarrow}} f(x)>\ln(e+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)>2\ln(e+1) \Leftrightarrow f(x)>f(e+3) \underset{x>e+2>2}{\overset{f\nearrow(2,+\infty)}{\Leftrightarrow}} x>e+3$

στ) Είναι $h(x)=\left|f(x)\right|=\left|2\ln(x-2)\right|=2\left|\ln(x-2)\right|\geq 0=h(3)$ για κάθε $x>2$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=3$ το $h(3)=0$.

Για $2<x<3 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(3)=0$ και για $x\geq 3 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)\geq f(3)=0$ άρα $h(x)=\left|f(x)\right|=\begin{cases} -f(x)\,, & 2<x<3 \\ f(x)\,, & x\geq 3 \end{cases}$