1η Άσκηση Γ΄ ΕΠΑΛ

2022-2023

Έως τη γραφική παράσταση συνάρτησης

Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^4-(\mu+\nu)x^2+\mu\nu}$ με $0<\mu<\nu$ και $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$. Γνωρίζουμε ότι $f(0)=2$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $M(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mu=1$ και $\nu=4$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g με τους άξονες.

δ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις: **i.** $w=\dfrac{1}{g}$ **ii.** $b=f^2$ **iii.** $R=\dfrac{f}{g}$

ε) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(f(0),g(0))$ και:

i. είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y=3x+2020$.

ii. είναι παράλληλη στην ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

iii. σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\hat{\omega}=150^\circ$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Έχουμε $f(0)=2 \Leftrightarrow \sqrt{\mu\nu}=2 \Leftrightarrow \sqrt{\mu\nu}^2=4 \Leftrightarrow \mu\nu=4 \quad (1)$

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $M(1,0)$ άρα $f(1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-(\mu+\nu)+\mu\nu}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-\mu-\nu+\mu\nu}=0 \Leftrightarrow 1-\mu-\nu+\mu\nu=0 \underset{\mu\nu=4}{\overset{\text{Από }(1)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow 1-\mu-\nu+4=0 \Leftrightarrow 5-\mu-\nu=0 \Leftrightarrow \mu=5-\nu \quad (2)$$

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu\nu=4\\ \mu=5-\nu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nu(5-\nu)=4\\ \mu=5-\nu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\nu^2+5\nu-4=0\\ \mu=5-\nu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\nu^2-5\nu+4=0\\ \mu=5-\nu\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\overset{\Delta=25-16=9}{\Leftrightarrow}\left(\text{Έχει ρίζες } \nu_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\nu=4 \text{ ή } \nu=1\\ \mu=5-\nu\end{cases}$$

Αν $\nu=4$ τότε από την (2) ισχύει $\mu=5-4=1$ δεκτή γιατί $\mu<\nu$

Αν $\nu=1$ τότε από την (2) ισχύει $\mu=5-1=4$ Απορρίπτεται γιατί $\mu>\nu$ ενώ πρέπει $\mu<\nu$

Τελικά η f γίνεται $f(x)=\sqrt{x^4-5x^2+4}$.

β) Για να ορίζεται η f πρέπει:

Πρέπει: $x^4-5x^2+4\ge 0$ και θέτουμε $x^2=\omega\ge 0$ και έχουμε: $\omega^2-5\omega+4\ge 0$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=25-16=9$

Επομένως το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις $\omega_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{8}{2}=4\\[2mm] \dfrac{2}{2}=1\end{cases}$

Άρα τελικά $\omega^2-5\omega+4\ge 0 \Leftrightarrow (\omega-4)(\omega-1)\ge 0$ και στο παρακάτω πινακάκι έχουμε το πρόσημό του και τις ρίζες του.

ω	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(\omega-4)(\omega-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα τελικά $\omega\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$ όμως ισχύει $x^2=\omega\ge 0$ άρα $\omega\in[0,1]\cup[4,+\infty)$.

$0\le\omega\le 1 \Leftrightarrow 0\le x^2\le 1 \Leftrightarrow |x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$ ή $\omega\ge 4 \Leftrightarrow x^2\ge 4 \Leftrightarrow |x|\ge 2 \Leftrightarrow x\le -2$ ή $x\ge 2$

Άρα τελικά $x\in(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$.

γ) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^4-5x^2+4}=0 \Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0 \overset{\text{Από β) ερώτημα}}{\Leftrightarrow} x^2=1$ ή $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 1$ ή $x=\pm 2$

άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $B(1,0)$, $\Gamma(-1,0)$, $\Delta(2,0)$ και $E(-2,0)$.

Είναι $f(0)=2$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $Z(0,2)$.

Για να ορίζεται η $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$ πρέπει $x^2+2\ne 0 \Leftrightarrow x^2\ne -2$ ισχύει άρα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=0$ άρα η C_g τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $O(0,0)$ (Προφανώς τέμνει και τον άξονα x΄x στο ίδιο σημείο αφού είναι η αρχή των αξόνων).

Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2+2}=0 \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ άρα η C_g τέμνει τον άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων.

δ) i. Η συνάρτηση $w=\frac{1}{g}$ για να ορίζεται:

- Πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της g δηλαδή $x\in\mathbb{R}$
- Πρέπει $g(x)\neq 0\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2+2}\neq 0\Leftrightarrow x^3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$

Άρα τελικά η w έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με τύπο:

$$w(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{x^3}{x^2+2}}=\frac{x^2+2}{x^3}\ ,\ x\neq 0$$

ii. Η συνάρτηση $b=f^2=f\cdot f$ είναι το γινόμενο της f με τον εαυτό της και έχει πεδίο ορισμού το πεδίο ορισμού της f και τύπο: $b(x)=f^2(x)=\sqrt{x^4-5x^2+4}^{\,2}=x^4-5x^2+4$, $x\in(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$

iii. Έχουμε $B=A\cap\mathbb{R}=A=(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$

Για να ορίζεται η συνάρτηση $R=\frac{f}{g}$ πρέπει $g(x)\neq 0\Leftrightarrow\frac{x^3}{x^2+2}\neq 0\Leftrightarrow x^3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\in B$ άρα τελικά πρέπει $x\in(-\infty,-2]\cup[-1,0)\cup(0,1]\cup[2,+\infty)$.

Είναι $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{\frac{x^3}{x^2+2}}=\frac{f(x)(x^2+2)}{x^3}=\frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}\,(x^2+2)}{x^3}$

ε) Το σημείο $A(f(0),g(0))$ είναι το $A(2,0)$.

i. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$. Επειδή η ε είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y=3x+2020$ τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα $\alpha=3$. Άρα $\varepsilon: y=3x+\beta$. Επειδή διέρχεται από το $A(2,0)$ τότε για $x=2$ έχουμε $y=0$ άρα $0=6+\beta\Leftrightarrow\beta=-6$. Επομένως $\varepsilon: y=3x-6$.

ii. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$. Επειδή η ε είναι παράλληλη στην ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ δηλαδή στην $y=x$, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης άρα $\alpha=1$. Επειδή διέρχεται από το $A(2,0)$ τότε για $x=2$ έχουμε $y=0$ άρα $0=1+\beta\Leftrightarrow\beta=-1$. Επομένως $\varepsilon: y=x-1$.

iii. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha x+\beta$. Επειδή η ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\hat{\omega}=150^\circ$ τότε

$\varepsilon\varphi\hat{\omega}=\alpha\Leftrightarrow\varepsilon\varphi 150^\circ=\alpha\Leftrightarrow\varepsilon\varphi(180^\circ-30^\circ)=\alpha\Leftrightarrow-\varepsilon\varphi(30^\circ)=\alpha\Leftrightarrow\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Επειδή διέρχεται από

το $A(2,0)$ τότε για $x=2$ έχουμε $y=0$ άρα $0=-\frac{\sqrt{3}}{3}2+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Επομένως $\varepsilon: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.