36η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση

Έστω η συνεχής και 1-1 συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(\alpha)=1$ και $f(\beta)=2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 2\beta-\alpha-\int_{1}^{2} f^{-1}(x)dx$.

ε) Αν $\alpha=0$, η f' είναι συνεχής και $\int_{0}^{\beta} f(x)dx=\int_{1}^{2} f^{-1}(x)dx$ τότε:

i) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x^2)+e^{x^2-1}-x^2=f^{-1}(2x-1)$.

ii) να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\beta]$ τέτοιο ώστε $\left(\frac{f}{h}\right)'(x_0)=0$ με $h(x)=x$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2<x_3$ τέτοια ώστε το $f(x_2)$ να μην είναι μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_3)$ [(1)], τότε:

• Στην περίπτωση που $f(x_1)<f(x_3)$:

- Αν $f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$ τότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $\xi_1\in(x_2,x_3)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f(x_1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}\xi_1=x_1$ άτοπο γιατί $x_1<x_2<\xi_1<x_3$.
- Αν $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$ τότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $\xi_2\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f(x_3)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}\xi_2=x_3$ άτοπο γιατί $x_1<\xi_2<x_2<x_3$.

• Ομοίως στην περίπτωση που $f(x_1)>f(x_2)$ καταλήγουμε με δύο περιπτώσεις σε άτοπο.

Επομένως η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$.

[(1)] Αν για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$ το $f(\beta)$ είναι μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\gamma)$ τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ. Πράγματι αν για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$ είναι $f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και αν είναι $f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

β) Η f γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα $f\nearrow[\alpha,\beta]$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\alpha$ το $f(\alpha)=1$ και ολικό μέγιστο για $x=\beta$ το $f(\beta)=2$.

γ) Έστω ότι η αντίστροφή f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f([\alpha,\beta])=[f(\alpha),f(\beta)]=[1,2]$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[1,2]$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(x_1)\ge f^{-1}(x_2)\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f\left(f^{-1}(x_1)\right)\ge f\left(f^{-1}(x_2)\right)\Rightarrow x_1\ge x_2 \text{ Άτοπο}$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.

δ) $\int_\alpha^\beta f(x)dx=2\beta-\alpha-\int_1^2 f^{-1}(x)dx\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_1^2 f^{-1}(x)dx=2\beta-\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_1^2 f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_1^2 f^{-1}(x)dx=\left[xf(x)\right]_\alpha^\beta\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_1^2 f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta\left[f(x)+xf'(x)\right]dx\ \ (A)$

Έστω $I=\int_1^2 f^{-1}(x)dx$, θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=1$ είναι $f(u)=1\Leftrightarrow f(u)=f(\alpha)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=\alpha$ και για $x=2$ είναι $f(u)=2\Leftrightarrow f(u)=f(\beta)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=\beta$

Άρα $I=\int_1^2 f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta uf'(u)du=\int_\alpha^\beta xf'(x)dx$

Άρα η σχέση (Α) γίνεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta xf'(x)dx=\int_\alpha^\beta\left[f(x)+xf'(x)\right]dx$ και ισχύει.

ε) i) Πρέπει $1\le x^2\le 2 \Leftrightarrow 1\le |x|\le \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \text{ ή } x\ge 1 \\ -\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$ και

$1\le 2x-1\le 2 \Leftrightarrow 2\le 2x\le 3 \Leftrightarrow 1\le x\le \dfrac{3}{2}$

Άρα η εξίσωση $f^{-1}\left(x^2\right)+e^{x^2-1}-x^2=f^{-1}\left(2x-1\right)$ ορίζεται για $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

Αφού $\alpha=0$ τότε $f\left(0\right)=1 \Leftrightarrow f^{-1}\left(1\right)=0$ και παρατηρούμε ότι η $x=1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης.

Ισχύει $e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Για x το x^2-1 είναι $e^{x^2-1}\ge x^2$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ άρα για $x\in\left(1,\sqrt{2}\right]$ είναι $e^{x^2-1}>x^2 \Leftrightarrow e^{x^2-1}-x^2>0$ (1)

Επίσης ισχύει $\left(x-1\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow x^2\ge 2x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$.

Δηλαδή για $x\in\left(1,\sqrt{2}\right]$ είναι $x^2>2x-1 \overset{f^{-1}\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(x^2\right)>f^{-1}\left(2x-1\right)$ (2)

Προσθέτοντας τις (1),(2) κατά μέλη προκύπτει ότι για $x\in\left(1,\sqrt{2}\right]$ είναι $f^{-1}\left(x^2\right)+e^{x^2-1}-x^2>f^{-1}\left(2x-1\right)$.

Άρα η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

ii) Όπως στο ερώτημα δ) είναι $I=\int_1^2 f^{-1}\left(x\right)dx=\int_\alpha^\beta uf'\left(u\right)du=\int_0^\beta xf'\left(x\right)dx$

Άρα $\int_0^\beta f\left(x\right)dx=\int_1^2 f^{-1}\left(x\right)dx \Leftrightarrow \int_0^\beta f\left(x\right)dx=\int_0^\beta xf'\left(x\right)dx \Leftrightarrow \int_0^\beta\left[f\left(x\right)-xf'\left(x\right)\right]dx=0$

Έστω η συνάρτηση $k\left(x\right)=f\left(x\right)-xf'\left(x\right)$, $x\in\left[0,\beta\right]$, η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αν $k\left(x\right)\ne 0$ για κάθε $x\in\left[0,\beta\right]$ τότε η k διατηρεί πρόσημο άρα $k\left(x\right)>0 \Rightarrow \int_0^\beta k\left(x\right)dx>0$ άτοπο ή άρα $k\left(x\right)<0 \Rightarrow \int_0^\beta k\left(x\right)dx<0$ άτοπο.

Επομένως υπάρχει $x_0\in\left[0,\beta\right]$ τέτοιο ώστε $k\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow f\left(x_0\right)-x_0f'\left(x_0\right)=0$

Αν $x_0=0$ τότε $f\left(0\right)=0 \Leftrightarrow 1=0$ αδύνατο

Άρα τελικά υπάρχει $x_0\in\left(0,\beta\right]$ τέτοιο ώστε $k\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow f\left(x_0\right)-x_0f'\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0f'\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)=0 \overset{x_0\ne 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{x_0f'\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)}{{x_0}^2}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f}{h}\right)'\left(x_0\right)=0$ γιατί είναι

$\left(\dfrac{f}{h}\right)'\left(x\right)=\dfrac{f'\left(x\right)h\left(x\right)-f\left(x\right)h'\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}=\dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}$.