27η Άσκηση

2021-2022

Γενική στις παραγώγους (Αναφορά στην τριγωνομετρία)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική.

β) Να βρείτε το πρόσημο της f στο $[0,2\pi]$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο $[0,2\pi]$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ αρχικά στο διάστημα $[0,2\pi]$ και στη συνέχεια στο $\mathbb{R}$.

ε) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής στο $[0,2\pi]$.

στ) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-2\pi,2\pi]$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $x+2\pi, x-2\pi \in \mathbb{R}$ και $f(x+2\pi)=f(x-2\pi)=f(x)$ άρα η f είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi$.

β) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \ (1)$

1ος τρόπος: Έστω ότι $\sigma\upsilon\nu x=0$ τότε από την (1) και $\eta\mu x=0$

Άρα $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow 0=1$ άτοπο, επομένως $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{3\pi}{4} \text{ ή } x=\frac{7\pi}{4}$$

2ος τρόπος:

Δείχνουμε ομοίως ότι $\eta\mu x \neq 0$ άρα $(1) \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=-1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x=-1 \Leftrightarrow \cdots \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{3\pi}{4}$ ή $x=\dfrac{7\pi}{4}$

Επειδή f συνεχής και στα διαστήματα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ δεν έχει ρίζες, τότε σε καθένα από αυτά θα διατηρεί πρόσημο.

Θα δώσουμε τιμές σε κάθε διάστημα και θα βρούμε το πρόσημο της f.

Διαστήματα	$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	π	2π
$f(x_0)$	1	-1	1
Πρόσημο της f	+	−	+

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2\pi)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \ (2)$

Ομοίως με την (1) στο προηγούμενο ερώτημα δείχνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, αντίστοιχα $\eta\mu x \neq 0$, εμφανίζουμε $\varepsilon\varphi x=1$ ή $\sigma\varphi x=1$ επομένως αφού $x\in[0,2\pi]$ τότε $x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$.

Επειδή f' συνεχής και στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ δεν έχει ρίζες, τότε σε καθένα από αυτά θα διατηρεί πρόσημο.

Θα δώσουμε τιμές σε κάθε διάστημα και θα βρούμε το πρόσημο της f.

Διαστήματα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	π	2π
$f'(x_0)$	1	-1	1
Πρόσημο της f'	+	−	+

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και στο $\left[\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x=\frac{\pi}{4}$ το $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,τοπικό ελάχιστο στο $x=\frac{5\pi}{4}$ το $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$, τοπικό ελάχιστο το $f(0)=1$ και τοπικό μέγιστο το $f(2\pi)=1$.

δ) $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ και $f(2\pi)=1$

Στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα: $f\left[\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x)\right)=\left(1,\sqrt{2}\right)$.

Στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα: $f\left[\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)\right]=\left(\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}^-} f(x), \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} f(x)\right)=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Στο $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα: $f\left[\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)\right]=\left(\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}^+} f(x), \lim_{x\to 2\pi^-} f(x)\right)=\left(-\sqrt{2},1\right)$

- Αν $\lambda>\sqrt{2}$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ είναι αδύνατη αφού $f([0,2\pi])=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.
- Αν $\lambda=\sqrt{2}$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $x=\frac{\pi}{4}$.
- Αν $\lambda\in\left(1,\sqrt{2}\right)$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, άρα 2 ρίζες ακριβώς.
- Αν $\lambda=1$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $x=0$ και στο $x=2\pi$.
- Αν $\lambda\in\left(-\sqrt{2},1\right)$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, άρα 2 ρίζες ακριβώς.
- Αν $\lambda=-\sqrt{2}$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $x=\frac{5\pi}{4}$.
- Αν $\lambda<-\sqrt{2}$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ είναι αδύνατη αφού $f([0,2\pi])=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

➢ Επειδή η f είναι περιοδική και σε μία περίοδο η $f(x)=\lambda$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα α $\lambda\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ τότε έχει άπειρες ρίζες στο $\mathbb{R}$. Ομοίως είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ αν $\lambda>\sqrt{2}$ ή $\lambda<-\sqrt{2}$.

ε) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2\pi)$ με $f''(x)=-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-f(x)$

Από το β) ερώτημα είναι $f''(x)<0$ σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$.

Επίσης $f''(x)>0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

Άρα η f είναι κοίλη στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και στο $\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	$0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{7\pi}{4} \quad 2\pi$				
$f'(x)$	+	−	−	+	+
$f''(x)$	−	−	+	+	−
f					

Τ.Μ. Σ.Κ. Τ.Ε. Σ.Κ.

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x=\frac{3\pi}{4}$ και στο $x=\frac{7\pi}{4}$. Τα σημεία καμπής είναι $A\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ και $B\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$

στ) Επειδή η f είναι περιοδική αρκεί να την σχεδιάσουμε στο $[0,2\pi]$ και ομοίως την συνεχίζουμε στο $[-2\pi,0]$.