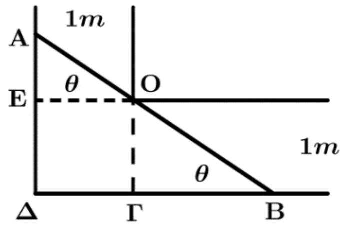
41η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση (Βασισμένη από άσκηση του σχολικού βιβλίου)



Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα.
Θέλουμε να μεταφέρουμε μία σκάλα ΑΒ από την μία μεριά του διαδρόμου στην άλλη, με την σκάλα να σχηματίζει με τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΕ και ΒΔ γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, όπως φαίνεται στο σχήμα α.
(Υποθέτουμε ότι το πάχος της σκάλας είναι αμελητέο).

α) Να εκφράσετε τα ΟΑ και ΟΒ συναρτήσει της γωνίας $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$f(\theta) = (AB) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο.

γ) Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος της σκάλας ΑΒ, ώστε να μπορεί να μεταφερθεί και να στρίψει στην γωνία του διαδρόμου όπως στο σχήμα α.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x) - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) dx$.

ε) Δίνεται η συνάρτηση $g(\theta) = \dfrac{f\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}}{1 - \theta^2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta}, \theta \in A$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΓΒ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(\mathrm{OE})}{(\mathrm{OA})} = \frac{1}{(\mathrm{OA})} \Rightarrow (\mathrm{OA}) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \text{και} \quad \eta\mu\theta = \frac{(\mathrm{O\Gamma})}{(\mathrm{OB})} = \frac{1}{(\mathrm{OB})} \Rightarrow (\mathrm{OB}) = \frac{1}{\eta\mu\theta}$$

Είναι $f(\theta) = (\mathrm{AB}) = (\mathrm{OA}) + (\mathrm{OB}) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$f'(\theta) = \frac{-\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{\eta\mu^3\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Τα μοναδικά πιθανά κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες της παραγώγου της.

$$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^3\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta = \sigma\upsilon\nu^3\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \overset{\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \theta = \frac{\pi}{4}$$

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $\mathrm{K}\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \mathrm{K}\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

γ) Έστω η συνάρτηση $\nu(\theta) = \eta\mu^3\theta - \sigma\upsilon\nu^3\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι συνεχής και από το προηγούμενο ερώτημα έχει μοναδική ρίζα την $\theta = \frac{\pi}{4}$, οπότε σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ η ν διατηρεί πρόσημο.

$\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}^3}{8} = \frac{1 - \sqrt{3}^3}{8} < 0$ άρα στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ έχουμε $\nu(\theta) < 0$.

$\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}^3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}^3 - 1}{8} > 0$ άρα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $\nu(\theta) > 0$.

Επίσης ισχύει ότι $\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα αφού $f'(\theta) = \frac{\nu(\theta)}{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $f'(\theta) < 0$ και στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(\theta) > 0$.

Άρα αφού η f είναι συνεχής στο $\theta = \frac{\pi}{4}$ τότε $f \searrow \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $f \nearrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\theta = \frac{\pi}{4}$ το $\mathrm{K}\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \mathrm{K}\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

Επομένως το ελάχιστο μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι $2\sqrt{2}$ m, άρα το μέγιστο μήκος της σκάλας ώστε να μπορεί να περάσει είναι $2\sqrt{2}$ m.

δ) $\mathrm{L} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x) - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

Θέτω $\sigma\upsilon\nu x = u$ τότε $-\eta\mu x\, dx = du$. Για $x = \frac{\pi}{4}$ είναι $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 0$. Άρα

$$\mathrm{L} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} dx = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{1}{1 - u^2} du = \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1 - u^2} du$$

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A + Au + B - Bu}{(1-u)(1+u)} = \frac{(A-B)u + A + B}{(1-u)(1+u)}$$

Πρέπει $\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow A=B=\dfrac{1}{2}$.

$$L=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-u^2}du=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\right)du=\left[2\ln|1-u|+2\ln|1+u|\right]_0^{\sqrt{2}/2}=$$

$$=2\ln\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right|+2\ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right|=2\left(\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right)=2\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2$$

ε) $g(\theta)=\dfrac{f\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}}{1-\theta^2-\sigma\upsilon\nu^2\theta}$, $\theta\in A$. Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει:

$$\begin{cases} \theta+\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{και} \\ 1-\theta^2-\sigma\upsilon\nu^2\theta\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{και} \\ 1-\theta^2-\sigma\upsilon\nu^2\theta\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{και} \\ \eta\mu^2\theta\neq\theta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{και} \\ |\eta\mu\theta|\neq|\theta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{και} \\ \theta\neq 0 \end{cases}.$$

(Ισχύει $|\eta\mu\theta|\leq|\theta|$ για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\theta=0$.) Άρα $A=\left(-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Από το προηγούμενο ερώτημα αφού η f έχει ολικό ελάχιστο το $2\sqrt{2}$ οπότε $f(\theta)\geq 2\sqrt{2}$ για κάθε $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Το $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $f\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>2\sqrt{2}$ οπότε $f\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\neq 0\Rightarrow g(\theta)\neq 0$

άρα η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα x΄x.