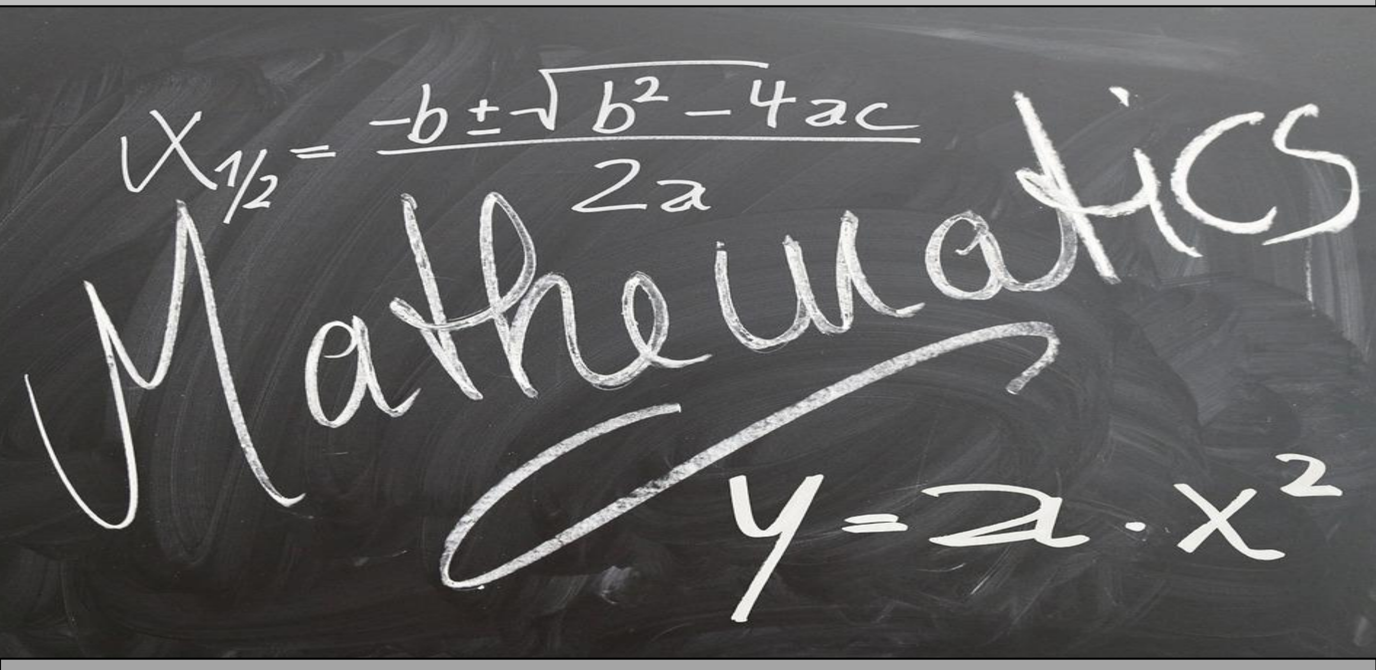
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

2019-2020

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Επαναληπτική θεωρητική άσκηση έως την παράγωγο συνάρτησης βασισμένη από άσκηση του σχολικού βιβλίου

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ στο παρακάτω σχήμα. Αν η f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$, είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x=\frac{5}{2}$ και δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x=1$ και $x=4$, τότε:

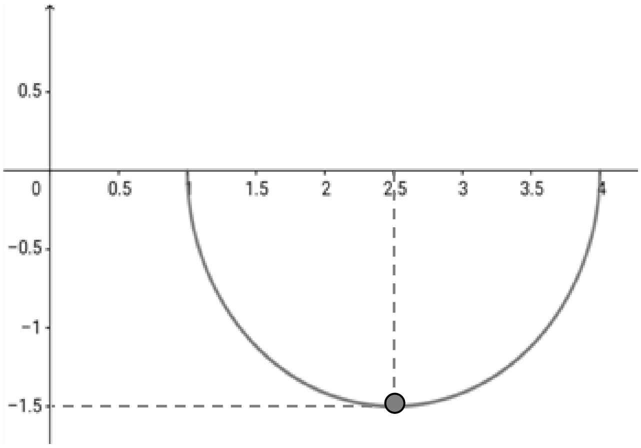
α) Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $-f(x), |f(x)|, \frac{1}{f(x)}, f(-x), f'(x), -f'(x), \frac{f(x)}{f'(x)}, \sqrt{f'(x)}$

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις $-f, |f|, \frac{1}{f}$.

γ) Αν η f′ είναι γνησίως αύξουσα να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις $-f', |f'|, \sqrt{f'}$.

δ) Να χαράξετε τις συναρτήσεις $-f(x), |f(x)|, f(-x)$.

ε) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{f(x)}, \lim\limits_{x\to4}\frac{1}{f(x)}$.



Νίκος Τούντας

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

α) $\mathbf{D_f=[1,4]}$

Η συνάρτηση $-f(x)$ ως συμμετρική με την f(x) ως προς τον άξονα x΄x έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με αυτήν άρα:

$\mathbf{D_{-f}=[1,4]}$

Η συνάρτηση $|f(x)|$ είναι η f(x) στα σημεία που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και αποτελείται και από τα συμμετρικά της σημεία ως προς τον άξονα x΄x που βρίσκονται κάτω από αυτόν άρα έχει το ίδιο πεδίο ορισμού άρα: $\mathbf{D_{|f|}=[1,4]}$

$$\mathbf{D_{\frac{1}{f}}=\{x\in D_f | f(x)\neq 0\}=(0,4)}$$

Η συνάρτηση $f(-x)$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων f(x) και -x άρα: $\mathbf{D_{f(-x)}=\{x\in\mathbb{R}|-x\in[1,4]\}=[-4,-1]}$

Επίσης η παραπάνω συνάρτηση είναι συμμετρική της f(x) ως προς τον άξονα y΄y άρα βρίσκεται εύκολα κι από εκεί το πεδίο ορισμού της.

Για το πεδίο ορισμού της $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ ισχύει πάντα ότι $\mathrm{D}_{\mathrm{f}'} \subseteq \mathrm{D}_{\mathrm{f}}$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 και το 4 και από την γραφική φαίνεται ότι η f δέχεται εφαπτόμενη σε κάθε σημείο $\mathrm{M}(\mathrm{xo},\mathrm{yo})$ με $\mathrm{xo} \in (1,4)$ άρα $\mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = (\mathbf{1},\mathbf{4})$.

Η συνάρτηση $-\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ ως συμμετρική με την f′(x) ως προς τον άξονα x΄x έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με αυτήν άρα:

$\mathbf{D}_{-\mathbf{f}'} = (\mathbf{1},\mathbf{4})$

Η συνάρτηση $\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{D}_{\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}'}} = \{\mathbf{D}_{\mathbf{f}} \cap \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} | \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\} = \left(\mathbf{1},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right) \cup \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\mathbf{4}\right)$ γιατί η παράγωγος ισούται με μηδέν όταν η κλίση της εφαπτομένης ισούται με μηδέν δηλαδή στο σημείο όπου η η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Η συνάρτηση $\sqrt{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{D}_{\sqrt{\mathbf{f}'}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} | \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\} = \left[\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\mathbf{4}\right)$ γιατί η παράγωγος ισούται με μηδέν όταν η κλίση της εφαπτομένης ισούται με μηδέν δηλαδή στο σημείο όπου η η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και αντίστοιχα η παράγωγος είναι θετική όταν η κλίση της εφαπτομένης είναι θετική.

β) Από γραφική παράσταση η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $\mathbf{x} \in \left[\mathbf{1},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\mathbf{x} \in \left[\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\mathbf{4}\right]$. Άρα για κάθε $\mathrm{x1},\mathrm{x2} \in \left[1,\frac{5}{2}\right]$ με $\mathrm{x1} < \mathrm{x2}$ ισχύει $\mathrm{f}(\mathrm{x1}) > \mathrm{f}(\mathrm{x2})$ **(1)** και για κάθε $\mathrm{x1},\mathrm{x2} \in \left[\frac{5}{2},4\right]$ με $\mathrm{x1} < \mathrm{x2}$ ισχύει $\mathrm{f}(\mathrm{x1}) < \mathrm{f}(\mathrm{x2})$ **(2)**

(1)⇒ $-\mathrm{f}(\mathrm{x1}) < -\mathrm{f}(\mathrm{x2})$ και (2)⇒ $-\mathrm{f}(\mathrm{x1}) > -\mathrm{f}(\mathrm{x2})$ άρα η -f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\mathrm{x} \in \left[1,\frac{5}{2}\right]$ και είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $\mathrm{x} \in \left[\frac{5}{2},4\right]$.

$|\mathrm{f}(\mathrm{x})| = -\mathrm{f}(\mathrm{x})$ αφού η f είναι αρνητική άρα η συνάρτηση $|\mathrm{f}(\mathrm{x})|$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την **-f**

Για κάθε $\mathrm{x1},\mathrm{x2} \in \left[1,\frac{5}{2}\right) \subseteq \left[1,\frac{5}{2}\right]$ με $\mathrm{x1} < \mathrm{x2}$ ισχύει $\mathrm{f}(\mathrm{x1}) > \mathrm{f}(\mathrm{x2}) \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x1})} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x2})}$

Για κάθε $\mathrm{x1},\mathrm{x2} \in (\frac{5}{2},4] \subseteq \left[\frac{5}{2},4\right]$ με $\mathrm{x1} < \mathrm{x2}$ ισχύει $\mathrm{f}(\mathrm{x1}) < \mathrm{f}(\mathrm{x2}) \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x1})} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x2})}$

Άρα η συνάρτηση $\frac{1}{\mathrm{f}}$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\mathrm{x} \in \left[1,\frac{5}{2}\right) \subseteq \left[1,\frac{5}{2}\right]$ και είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $\mathrm{x} \in (\frac{5}{2},4] \subseteq \left[\frac{5}{2},4\right]$

γ) Αφού η f′ είναι γνησίως αύξουσα τότε για κάθε $\mathbf{x1},\mathbf{x2} \in (\mathbf{1},\mathbf{4})$ με $\mathbf{x1} < \mathbf{x2}$ ισχύει $\mathbf{f}'(\mathbf{x1}) < \mathbf{f}'(\mathbf{x2})$ (3)

(3)⇒ $-\mathrm{f}'^{(\mathrm{x1})} > -\mathrm{f}'(\mathrm{x2})$ άρα η $-\mathrm{f}'$ είναι γνησίως φθίνουσα τότε για κάθε $\mathrm{x1},\mathrm{x2} \in (1,4)$

Με βάση την κλίση της εφαπτομένης και το πρόσημο της παραγώγου που αναφέραμε στο α ερώτημα ισχύει:

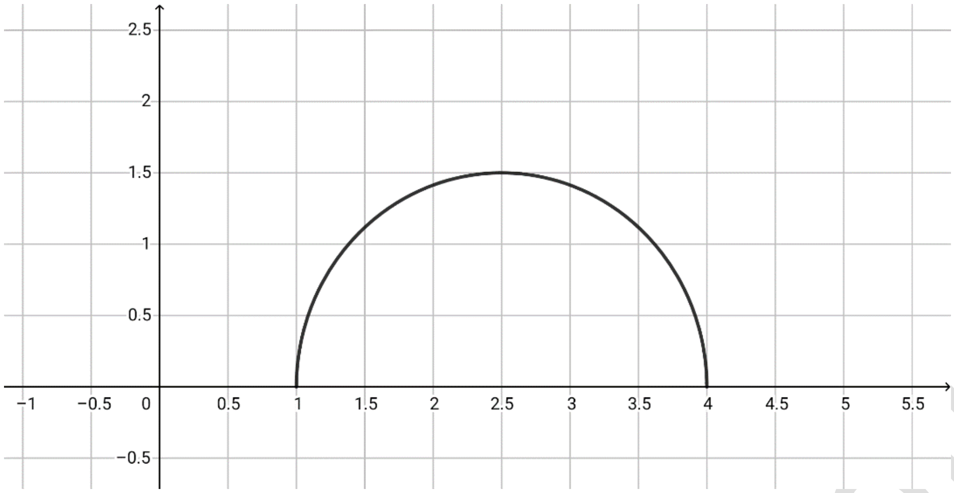
$|\mathrm{f}'(\mathrm{x})| = -\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ για κάθε $\mathrm{x} \in \left(1,\frac{5}{2}\right]$ και $|\mathrm{f}'(\mathrm{x})| = \mathrm{f}'(\mathrm{x})$ για κάθε $\mathrm{x} \in \left(\frac{5}{2},4\right)$

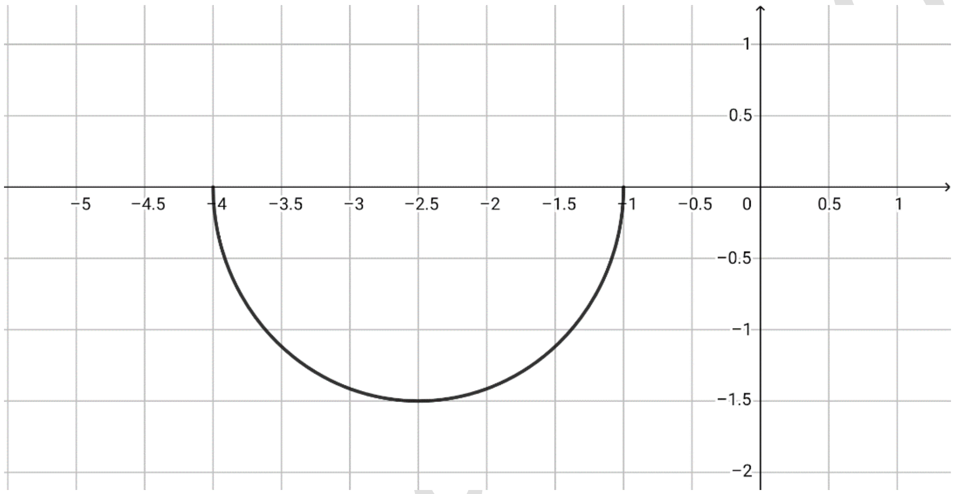
Άρα για κάθε $\mathrm{x} \in \left(1,\frac{5}{2}\right]$ η $|\mathrm{f}'(\mathrm{x})|$ είναι γνησίως φθίνουσα και για κάθε $\mathrm{x} \in \left[\frac{5}{2},4\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $\mathrm{x1},\mathrm{x2} \in [\frac{5}{2},4) \subseteq (1,4)$ με $\mathrm{x1} < \mathrm{x2}$ ισχύει $\mathrm{f}'^{(\mathrm{x1})} < \mathrm{f}'(\mathrm{x2}) \Rightarrow \sqrt{\mathrm{f}'(x1)} < \sqrt{\mathrm{f}'(x2)}$ άρα η συνάρτηση $\sqrt{\mathrm{f}'}$ είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Με βάση τις συμμετρίες που αναφέραμε στο πρώτο ερώτημα ευκολά χαράζουμε τις συναρτήσεις.

ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΟΙ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $-\mathbf{f(x)}, |\mathbf{f(x)}|$ ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΦΑΙΝΟΝΑΤΙ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΣΧΗΜΑ.





ε) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ γιατί $f(x)<0$ κοντά στο 1 από μεγαλύτερες τιμές και στο 1 ισούται με μηδέν η f.

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ γιατί $f(x)<0$ κοντά στο 4 από μεγαλύτερες τιμές και στο 4 ισούται με μηδέν η f.