49η Επαναληπτική Άσκηση

Αναφορά στα πολυώνυμα με βάση τις ασκήσεις 5 και 6 σελίδα 122 του σχολικού βιβλίου.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- Η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και $f(0)=4, f'(-1)=2, f''(2)=4$ και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $x \in \mathbb{R}$ είναι το $\alpha \geq 1$.
- Η g είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και η γραφική της παράσταση εφάπτεται των ευθειών $y = x + 1$ και $y = 3x - 1$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,2)$ αντιστοίχως.
- Η h είναι περιττή και παραγωγίσιμη με $h(1)=1$ και ισχύει ότι όλες οι εφαπτόμενες της γραφικής της παράστασης διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \geq 1$ να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στην θέση $x = x_1$ και ένα τοπικό ελάχιστο στην θέση $x = x_2$ με $x_1 < x_2$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{42^2 + 16 \cdot 81} = 21$)

β) Αν $f^{(3)}(1) = 6$ να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτηση h και να δείξετε ότι $g(x) = 2h^3(x) - 2h^2(x) + h(x) + 1, x \in \mathbb{R}$.

δ) Να εξετάσετε αν θα μπορούσε η g να είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ε(Ω) που περικλείεται από τις ευθείες $x = \kappa, x = \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\kappa \leq \lambda$ και την συνάρτηση $\rho(x) = h(x)|h(x)|, x \in \mathbb{R}$.

στ) Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x^3 + 8x + 2020} \in \mathbb{R}$ να εξετάσετε αν η f θα μπορούσε να είναι πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του 3.

ζ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x^2) - f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ είναι αδύνατη στο $[x_1, x_2]$ με $x_1 < 0 < x_2$.

Επιμέλεια: Νίκος Τούντας

ΛΥΣΗ

α) Αφού f πολυώνυμο 3ου βαθμού τότε είναι της μορφής $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, x\in\mathbb{R}$ με $\alpha\geq 1$ και $\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=4\Leftrightarrow\delta=4$ άρα έχουμε $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+4, x\in\mathbb{R}$

Είναι 3 φορές παραγωγίσιμη με:

- $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma, x\in\mathbb{R}$ και $f'(-1)=2\Leftrightarrow 3\alpha-2\beta+\gamma=2$ **(1)**

- $f''(x)=6\alpha x+2\beta, x\in\mathbb{R}$ και $f''(2)=4\Leftrightarrow 12\alpha+2\beta=4\Leftrightarrow 6\alpha+\beta=2\Leftrightarrow\beta=2-6\alpha$ **(2)**

- $f^{(3)}(x)=6\alpha, x\in\mathbb{R}$

Η (1) γίνεται: $3\alpha-2\beta+\gamma=2\Leftrightarrow 3\alpha-2(2-6\alpha)+\gamma=2\Leftrightarrow 3\alpha-4+12\alpha+\gamma=2\Leftrightarrow\gamma=6-15\alpha$

Άρα τελικά έχουμε: $f(x)=\alpha x^3+(2-6\alpha)x^2+(6-15\alpha)x+4, x\in\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=3\alpha x^2+2(2-6\alpha)x+(6-15\alpha), x\in\mathbb{R}$$

- $\Delta_1=4(2-6\alpha)^2-12\alpha(6-15\alpha)=4(4-24\alpha+36\alpha^2)-72\alpha+180\alpha^2=$

$$=16-96\alpha+144\alpha^2-72\alpha+180\alpha^2=324\alpha^2-168\alpha+16=81\alpha^2-42\alpha+4=0$$

- $\Delta_2=42^2+16\cdot 81>0$ Άρα $\Delta_1=0\Rightarrow\alpha_{1,2}=\dfrac{-21\pm 21}{72}\Leftrightarrow\alpha_{1,2}=\begin{cases}0\\-\dfrac{21}{36}\end{cases}$ άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου για την Δ_1:

α	$-\infty$		$-\frac{21}{36}$		0		$+\infty$
Δ_1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ισχύει ότι $\alpha\geq 1>0$ άρα $\Delta_1>0$ άρα έχουμε ότι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\begin{cases}x_1\\x_2\end{cases}$ με $x_1<x_2$ και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Άρα για κάθε $\alpha\geq 1$ η f έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

β) Έχουμε $f^{(3)}(1)=6\Leftrightarrow 6\alpha=6\Leftrightarrow\alpha=1$ άρα τελικά προκύπτει ότι: $f(x)=x^3-4x^2-9x+4, x\in\mathbb{R}$.

γ) Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $M(xo, h(xo))$ έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y - h(xo) = h'(xo)(x - xo)$

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει:

$-h(xo) = -xoh'(xo) \Leftrightarrow xoh'(xo) - h(xo) = 0$ και επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $xo \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$xh'(x) - h(x) = 0 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{xh'(x) - h(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{h(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} c_1 x, x < 0 \\ c_2 x, x > 0 \end{cases}$$

Είναι $h(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$ και επειδή η h είναι περιττή έχουμε $h(1) = -h(-1) \Leftrightarrow c_2 = 1$ άρα τελικά προκύπτει $h(x) = x, x \neq 0$.

Η h είναι περιττή και έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ άρα ισχύει $h(-x) = -h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $x = 0: h(0) = -h(0) \Leftrightarrow h(0) = 0$ άρα τελικά έχουμε $h(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

Αφού g πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού τότε είναι της μορφής $g(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, x \in \mathbb{R}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$. Η γραφική παράσταση της g εφάπτεται των ευθειών $y = x + 1$ και $y = 3x - 1$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,2)$ αντιστοίχως οπότε:

$g(0) = 1 \Leftrightarrow \delta = 1$, $g'(0) = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1$, $g(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$ και
$g'(1) = 3 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$ άρα προκύπτει:

$$g(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 2h^3(x) - 2h^2(x) + h(x) + 1, x \in \mathbb{R}$$

δ) Αν η g ήταν πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού τότε $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Είναι $g'(x) = 2\alpha x + \beta$, $g(0) = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1$, $g'(0) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$ και $g(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 2 \Leftrightarrow \alpha = 0$
ΑΤΟΠΟ γιατί $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Άρα η g δεν μπορεί να είναι πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού.

ε) $\rho(x) = h(x)|h(x)| = x|x|, x \in \mathbb{R}$. Για το εμβαδόν $E(\Omega)$ παίρνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\kappa < \lambda < 0: E(\Omega) = \int_\kappa^\lambda |\rho(x)| dx = \int_\kappa^\lambda |-x^2| dx = \int_\kappa^\lambda x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_\kappa^\lambda = \frac{\lambda^3 - \kappa^3}{3}$ τ.μ

Αν $0 < \kappa < \lambda: E(\Omega) = \int_\kappa^\lambda |\rho(x)| dx = \int_\kappa^\lambda |x^2| dx = \int_\kappa^\lambda x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_\kappa^\lambda = \frac{\lambda^3 - \kappa^3}{3}$ τ.μ

Αν $\kappa = \lambda = 0: E(\Omega) = \int_0^0 |\rho(x)| dx = 0$ τ.μ

Αν $\kappa < 0 < \lambda: E(\Omega) = \int_\kappa^\lambda |\rho(x)| dx = \int_\kappa^0 |\rho(x)| dx + \int_0^\lambda |\rho(x)| dx = \int_\kappa^0 |-x^2| dx + \int_0^\lambda |x^2| dx =$

$$= \int_\kappa^0 x^2 dx + \int_0^\lambda x^2 dx = \int_\kappa^\lambda x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_\kappa^\lambda = \frac{\lambda^3 - \kappa^3}{3} \text{ τ.μ}$$

στ) Αν η f ήταν βαθμού μεγαλύτερου του $3^{ου}$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+8x+2020}=\pm\infty$ ΑΤΟΠΟ άρα δεν μπορεί να είναι βαθμού μεγαλύτερου του $3^{ου}$.

ζ) Αφού τελικά έχουμε $f(x)=x^3-4x^2-9x+4, x\in\mathbb{R}$ δηλαδή $\alpha=1$ τότε σύμφωνα με το α) ερώτημα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=x_1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=x_2$ άρα ισχύει:

- $f(x)\le f(x_1)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$ με την ισότητα να ισχύει για $x=x_1$ (1)

- $f(x)\ge f(x_2)\Leftrightarrow f(x)-f(x_2)\ge 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$ με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$ (2)

Άρα έχουμε: $f(x^2)-f(x)=f(x_2)-f(x_1)\Leftrightarrow\left(f(x_1)-f(x)\right)+\left(f(x^2)-f(x_2)\right)=0$ (3)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι (3): $\left(f(x_1)-f(x)\right)+\left(f(x^2)-f(x_2)\right)=0$ αν και μόνον αν $f(x_1)-f(x)=0$ και $f(x^2)-f(x_2)=0$ δηλαδή έχουμε: $x=x_1$ και $x^2=x_2\Leftrightarrow x=\sqrt{x_2}$

Δεν γίνεται $x_1=\sqrt{x_2}$ γιατί $x_1<0<\sqrt{x_2}$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.