2η Άσκηση

2020-2021

Έως τα ακρότατα συνάρτησης (παράγραφος 1.3)

Δίνεται η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2-\lambda x+4}\right)\left(|x|-x\right)}$, $x\in A$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.

Έστω και η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του αριθμού $\lambda\in\mathbb{R}$:

i. Να βρείτε το Α.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

β) i. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $h(x)=g(|x|)$.

ii. Να δείξετε ότι η h έχει ακρότατο και να βρείτε την θέση του.

iii. Να βρείτε την ρίζα της εξίσωσης $g(x)=g(|x|)$ στο $(-\infty,0]$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $g\left(\left|x^3+3xy^2\right|\right)$ και $g\left(\left|y^3+3x^2y\right|\right)$ αν $x>y>0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $g\left(\left|x-\frac{\pi}{6}\right|\right)+g\left(\left|2\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-11\eta\mu x+3\right|\right)=g(0)$.

Δίνεται επίσης ότι $\lambda=0$ και έχουμε $(f\circ g)(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^4+4x^2+4}\right)\left(|g(x)|-g(x)\right)}$ για κάθε

$x\le\rho$, με $\rho\le 0$ η ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$.

ε) Να δείξετε ότι $g(x)=\begin{cases} x\sqrt{x^2+4} & ,x<\rho \\ 0 & ,x=\rho \end{cases}$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) **i.** Για το πεδίο ορισμού της f προκύπτουν οι εξής περιορισμοί:

- Πρέπει: $\left(\sqrt{x^2-\lambda x+4}\right)\left(|x|-x\right)\geq 0$

  Από τις ιδιότητες των απολύτων ισχύει $-|x|\leq x\leq |x|\Rightarrow |x|-x\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επίσης ισχύει $\sqrt{x^2-\lambda x+4}\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

  Άρα τελικά $\left(\sqrt{x^2-\lambda x+4}\right)\left(|x|-x\right)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Πρέπει: $x^2-\lambda x+4\geq 0$. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=\lambda^2-16=(\lambda-4)(\lambda+4)$ και το πρόσημο και οι ρίζες της διακρίνουσας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$\Delta=\lambda^2-16=(\lambda-4)(\lambda+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

➢ Αν $\Delta\leq 0$ δηλαδή $\lambda\in[-4,4]$ τότε το τριώνυμο έχει η μία ή καμία ρίζα και διατηρεί το πρόσημο του συντελεστή $\alpha=1$, με εξαίρεση το σημείο μηδενισμού (αν υπάρχει).
Άρα τελικά $x^2-\lambda x+4\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

➢ Αν $\Delta>0$ δηλαδή $\lambda\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις $x_1=\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-16}}{2}$ και $x_2=\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-16}}{2}$ με προφανώς $x_1<x_2$.

Τώρα το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2-\lambda x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα τελικά πρέπει $x\in\left(-\infty,\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-16}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-16}}{2},+\infty\right)$

Επομένως τελικά ισχύει:

$$A=\begin{cases}\mathbb{R} & ,\ \lambda\in[-4,4]\\ \left(-\infty,\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-16}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-16}}{2},+\infty\right) & ,\lambda\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)\end{cases}$$

ii. $f(x)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-\lambda x+4}\right)\left(|x|-x\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-\lambda x+4}=0$ ή $|x|-x=0$

Για το $|x|-x=0$ από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε $|x|-x=0\Leftrightarrow|x|=x\Leftrightarrow x\geq 0$

Δεν χρειάζεται να το δείξουμε όμως για διδακτικούς λόγους προκύπτει ως εξής:

➢ Αν $x\leq 0: -x-x=0\Leftrightarrow -2x=0\Leftrightarrow x=0$ Δεκτή

➢ Αν $x>0: x-x=0\Leftrightarrow 0=0$ Ισχύει άρα $|x|-x=0$ για κάθε $x>0$

Άρα τελικά $|x|-x=0$ για κάθε $x\geq 0$

Για το $\sqrt{x^2-\lambda x+4}=0\Leftrightarrow x^2-\lambda x+4=0$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

➢ Αν $\lambda\in(-\infty,-4)$ τότε έχει τις δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$ του προηγούμενου ερωτήματος και από τους τύπους του Vieta έχουμε ότι $S=x_1+x_2=\lambda<0$ και $P=x_1x_2=4>0$ άρα ισχύει $x_1<x_2<0$
Το πρόσημό και οι ρίζες του μαζί με το πρόσημο και τις ρίζες της f φαίνεται στον παρακάτω

πίνακα.

x	$-\infty$	x_1		x_2		0	$+\infty$
$x^2-\lambda x+4$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt{x^2-\lambda x+4}$	$+$	0	$+$	0	$+$		$+$
$\lvert x\rvert-x$	$+$		$+$		$+$	0	Παντού μηδέν
$f(x)$	$+$	0	Δεν ορίζεται	0	$+$	0	Παντού μηδέν

Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty)\cup\{x_1,x_2\}$

➢ Αν $\lambda=-4$ τότε $x^2-\lambda x+4=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty)\cup\{-2\}$

➢ Αν $\lambda\in(-4,4)$ τότε $\sqrt{x^2-\lambda x+4}=0 \Leftrightarrow x^2-\lambda x+4=0$ Αδύνατη

Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty)$

➢ Αν $\lambda=4$ τότε $x^2-\lambda x+4=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty)$

➢ Αν $\lambda\in(4,+\infty)$ τότε έχει τις δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$ του προηγούμενου ερωτήματος και από τους τύπους του Vieta έχουμε ότι $S=x_1+x_2=\lambda>0$ και $P=x_1x_2=4>0$ άρα ισχύει $0<x_1<x_2$

Το πρόσημό και οι ρίζες του μαζί με το πρόσημο και τις ρίζες της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		x_1		x_2	$+\infty$
$x^2-\lambda x+4$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\sqrt{x^2-\lambda x+4}$	$+$		$+$	0	$+$	0	$+$
$\lvert x\rvert-x$	$+$	0	Παντού μηδέν				
$f(x)$	$+$	0	Παντού μηδέν	0	Δεν ορίζεται	0	Παντού μηδέν

Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x\in[0,x_1]\cup[x_2,+\infty)$

Επομένως για την εξίσωση έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} x\in[0,+\infty)\cup\{x_1,x_2\} & ,\lambda\in(-\infty,-4) \\ x\in[0,+\infty)\cup\{-2\} & ,\lambda=-4 \\ x\in[0,+\infty) & ,\lambda\in(-4,4) \\ x\in[0,+\infty) & ,\lambda=4 \\ x\in[0,x_1]\cup[x_2,+\infty) & ,\lambda\in(4,+\infty) \end{cases}$$

β) i. Αρχικά για το πεδίο ορισμού της $h(x)=g(|x|)$ έχουμε $D_h=\begin{cases}|x|\in\mathbb{R} \\ x\in\mathbb{R}\end{cases}=\mathbb{R}$ αφού πρόκειται για σύνθεση συναρτήσεων.

Αφού η $g\nearrow\mathbb{R}$ τότε για την μονοτονία της $h(x)=g(|x|)\,,x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

Για κάθε $x_1,x_2\le 0$ με $x_1<x_2 \overset{x_1,x_2\le 0}{\Rightarrow} |x_1|>|x_2| \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(|x_1|)>g(|x_2|)\Rightarrow$

$$\Rightarrow h(x_1)>h(x_2)\Rightarrow h\searrow(-\infty,0]$$

Για κάθε $x_1,x_2\ge 0$ με $x_1<x_2 \overset{x_1,x_2\ge 0}{\Rightarrow} |x_1|<|x_2| \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(|x_1|)<g(|x_2|)\Rightarrow$

$$\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$$

ii. **1ος τρόπος:** Ισχύει $|x|\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g\nearrow\mathbb{R}$ άρα $|x|\ge 0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(|x|)\ge g(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $|x|=0\Leftrightarrow x=0$.

Άρα η $g(|x|)=h(x)$ έχει ελάχιστο το $g(0)=h(0)$ για $x=0$.

2ος τρόπος: Για $x<0 \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0)$, για $x>0 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0)$ και για $x=0\Leftrightarrow h(x)=h(0)$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(x)\ge h(0)$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Άρα η h έχει ελάχιστο το $h(0)$ για $x=0$.

iii. Για $x\le 0$: $g(x)=g(|x|)\Leftrightarrow g(x)-g(|x|)=0$

Έστω η συνάρτηση $k(x)=g(x)-g(|x|)=g(x)-h(x)\,,x\le 0$.

Για $x_1,x_2\le 0$ με $x_1<x_2 \overset{g\nearrow}{\underset{h\searrow}{\Rightarrow}} \begin{cases} g(x_1)<g(x_2) \\ h(x_1)>h(x_2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x_1)<g(x_2) \\ -h(x_1)<-h(x_2)\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow k(x_1)<k(x_2)\Rightarrow k\nearrow(-\infty,0]$$

Ισχύει $k(0)=g(0)-g(|0|)=g(0)-g(0)=0$ άρα το μηδέν είναι μία ρίζα της εξίσωσης

$k(x)=0\Leftrightarrow g(x)=g(|x|)$ και επειδή η $k\nearrow(-\infty,0]$ τότε το μηδέν είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα αυτό.

γ) Ισχύει $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3>0$ αφού $x>y>0$ άρα έχουμε:

$$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3>0\Leftrightarrow x^3+3xy^2>y^3+3x^2y \quad (1)$$

Επειδή $x>y>0$ τότε $x^3+3xy^2>0$ και $y^3+3x^2y>0$ άρα η (1) γίνεται:

$$x^3+3xy^2>y^3+3x^2y \overset{h\nearrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} h(x^3+3xy^2)>h(y^3+3x^2y)\Leftrightarrow g(|x^3+3xy^2|)>g(|y^3+3x^2y|)$$

δ) $g\left(\left|x-\frac{\pi}{6}\right|\right)+g\left(\left|2ημ^3x+3συν^2x-11ημx+3\right|\right)=g(0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+h\left(2ημ^3x+3συν^2x-11ημx+3\right)=h(0)$

Από το ερώτημα β) ii. έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(x)\ge h(0)$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Επομένως ισχύουν τα εξής:

$h\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\ge h(0)$ με την ισότητα να ισχύει για $x-\frac{\pi}{6}=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$ (α)

$h\left(2\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-11\eta\mu x+3\right)\ge h(0)$ με την ισότητα να ισχύει για $2\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-11\eta\mu x+3=0$ (β)

Θα λύσουμε την εξίσωση $2\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-11\eta\mu x+3=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^3x+3\left(1-\eta\mu^2x\right)-11\eta\mu x+3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^3x+3-3\eta\mu^2x-11\eta\mu x+3=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^3x-3\eta\mu^2x-11\eta\mu x+6=0$$

Θέτουμε $\eta\mu x=\omega$ με $-1\le\omega\le1$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$2\omega^3-3\omega^2-11\omega+6=0$ και εφαρμόζουμε σχήμα Horner.

2	-3	-11	6	ρ= -2
	-4	14	-6	
2	-7	3	0	

$2\omega^3-3\omega^2-11\omega+6=0 \Leftrightarrow (\omega+2)\left(2\omega^2-7\omega+3\right)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\omega=-2 & \text{Απορρίπτεται}\\ 2\omega^2-7\omega+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=-2 \quad \text{Απορρίπτεται}\\ \omega=3 \quad \text{Απορ} \quad \text{ή} \quad \omega=\dfrac{1}{2} \quad \text{Δεκτή}\end{cases} \Leftrightarrow \omega=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Άρα η (β) τελικά γίνεται: $h\left(2\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-11\eta\mu x+3\right)\ge h(0)$ με την ισότητα να ισχύει για $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (α),(β) προκύπτει: $h\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+h\left(2\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-11\eta\mu x+3\right)\ge h(0)$ (γ)

Τώρα με βάση τις (α),(β),(γ) συμπεραίνουμε ότι $h\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+h\left(2\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-11\eta\mu x+3\right)=h(0)$ όταν

$$x-\frac{\pi}{6}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6} \quad \text{ΚΑΙ} \quad 2\eta\mu^3x+3\sigma\upsilon\nu^2x-11\eta\mu x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Άρα τελικά $x=\frac{\pi}{6}$.

ε) Ισχύει ότι $f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+4}\right)\left(|x|-x\right)}\ ,x\in\mathbb{R}$ άρα έχουμε ότι:

$f\left(g(x)\right)=\sqrt{\left(\sqrt{g^2(x)+4}\right)\left(|g(x)|-g(x)\right)} \Leftrightarrow (f\circ g)(x)=\sqrt{\left(\sqrt{g^2(x)+4}\right)\left(|g(x)|-g(x)\right)}$ (3) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επίσης έχουμε $(f\circ g)(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^4+4x^2+4}\right)\left(|g(x)|-g(x)\right)}\ ,\ x\le\rho$ (4)

Για $x\le\rho \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)\le g(\rho)=0$ άρα $|g(x)|=-g(x)$ για κάθε $x\le\rho$ και η ισότητα ισχύει για $x=\rho$ και οι σχέσεις (3) και (4) γίνονται:

$(f\circ g)(x)=\sqrt{-2g(x)\sqrt{g^2(x)+4}}\ ,\ x\in\mathbb{R}$ (3) και $(f\circ g)(x)=\sqrt{-2g(x)\sqrt{x^4+4x^2+4}}\ ,\ x\le\rho$ (4)

Άρα από (3) και (4) για $x<\rho$ ισχύει:

$$\sqrt{-2g(x)\sqrt{g^2(x)+4}}=\sqrt{-2g(x)\sqrt{x^4+4x^2+4}}\Leftrightarrow -2g(x)\sqrt{g^2(x)+4}=-2g(x)\sqrt{x^4+4x^2+4}\overset{g(x)<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{g^2(x)+4}=\sqrt{x^4+4x^2+4}\Leftrightarrow g^2(x)+4=x^4+4x^2+4\Leftrightarrow g^2(x)=x^4+4x^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|g(x)|=\sqrt{x^4+4x^2}\overset{g(x)<0}{\Leftrightarrow}-g(x)=\sqrt{x^2(x^2+4)}\Leftrightarrow g(x)=-\sqrt{x^2}\sqrt{x^2+4}\Leftrightarrow g(x)=-|x|\sqrt{x^2+4}\quad(5)$$

Ισχύει $x\le\rho\le0$ άρα τελικά η (5) γίνεται $g(x)=x\sqrt{x^2+4}$ $,x<\rho$ και για $x=\rho: g(x)=0$ άρα τελικά

$$g(x)=\begin{cases}x\sqrt{x^2+4} & ,x<\rho\\ 0 & ,x=\rho\end{cases}.$$