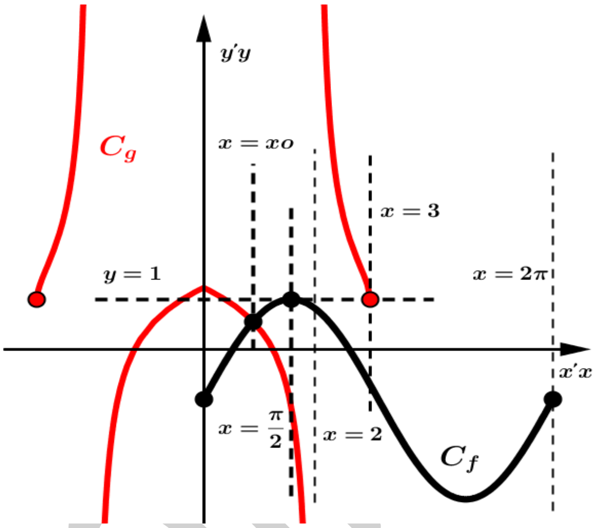
# 2η Άσκηση Γ΄ ΕΠΑΛ

**2020-2021**

**Έως τη γραφική παράσταση συνάρτησης**




Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ του διπλανού σχήματος με τύπους:
$f(x)=2\eta\mu x-1$, $x\in[0,2\pi]$ και

$g(x)=\sqrt{3-|x|}+\dfrac{1}{|x|-2}$, $x\in B$.

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g$ χωρίς χρήση του σχήματος.

**β)** Να ορίσετε την συνάρτηση $R=\dfrac{1}{f}$.

**γ)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x, η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x και για ποιες κάτω.

**δ)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

**ε)** Να λύσετε τις ανισώσεις: **i.** $f(x)>g(x)$ **ii.** $f(x)<g(x)$.

**στ)** Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x)-f(x)g(x)>f(x)-g(x)$.

**Στέλιος Μιχαήλογλου – Ευάγγελος Τόλης – Νίκος Τούντας**

# Λύση

**α)** Για την συνάρτηση $g(x)=\sqrt{3-|x|}+\dfrac{1}{|x|-2}$, $x\in B$ έχουμε τους εξής περιορισμούς:

$$\text{Πρέπει: } \begin{cases} 3-|x|\ge 0 \\ \text{και} \\ |x|-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 3 \\ \text{και} \\ |x|\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le x\le 3 \\ \text{και} \\ x\ne \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,3]$$

Άρα τελικά $B=[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,3]$.

**β)** Για το πεδίο ορισμού της $R=\dfrac{1}{f}$ έχουμε τους εξής περιορισμούς:

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} x\in[0,2\pi] \\ \text{και} \\ f(x)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0,2\pi] \\ \text{και} \\ 2\eta\mu x-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0,2\pi] \\ \text{και} \\ \eta\mu x\ne \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0,2\pi] \\ \text{και} \\ \eta\mu x\ne \eta\mu\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0,2\pi] \\ \text{και} \\ x\ne 2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6} \;\text{ ή }\; x\ne 2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0,2\pi] \\ \text{και} \\ x\ne \dfrac{\pi}{6} \;\text{ ή }\; x\ne \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},2\pi\right]$$

Άρα η $R=\dfrac{1}{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Gamma=\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6},2\pi\right]$

Έχουμε $R(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{2\eta\mu x-1}$, $x\in\Gamma$.

**γ)** Η f σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα αν λύσουμε την $f(x)=0$ στο $[0,2\pi]$ προκύπτει $x=\dfrac{\pi}{6}$ ή $x=\dfrac{5\pi}{6}$, άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $M\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$, $N\left(\dfrac{5\pi}{6},0\right)$.
Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x για $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6},2\pi\right]$ και πάνω από τον άξονα x΄x για $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

**δ)** Με βάση το σχήμα, οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε μοναδικό σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x=xo$ άρα η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει λύση την $x=xo$.

**ε)** Με βάση το σχήμα έχουμε ότι: $g(x)>f(x)\Leftrightarrow x\in[0,xo)\cup(2,3]$ και επίσης $g(x)<f(x)\Leftrightarrow x\in(xo,2)$.

**στ)** $f^2(x)-f(x)g(x)>f(x)-g(x)\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)g(x)-f(x)+g(x)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)+g(x)-f(x)g(x)>0\Leftrightarrow f(x)[f(x)-1]-g(x)[f(x)-1]>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [f(x)-1][f(x)-g(x)]>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-1>0$ και $f(x)-g(x)>0$ (A) ή $f(x)-1<0$ και $f(x)-g(x)<0$ (B)

$$(A)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>1 \\ \text{και} \\ f(x)>g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)>1\ \text{Αδύνατη} \\ \text{και} \\ x\in(xo,2)\end{cases}\Leftrightarrow \text{Η } (A)\ \text{Αδύνατη}$$

καθώς από το σχήμα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται ποτέ πάνω από την $y=1$ και λύνουμε την $f(x)>g(x)$ με βάση το προηγούμενο ερώτημα.

$$(B)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)<1 \\ \text{και} \\ f(x)<g(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right] \\ \text{και} \\ x\in[0,xo)\cup(2,3]\end{cases}$$

καθώς η γραφική παράσταση της f τέμνει την $y=1$ μόνο για $x=\pi/2$ με βάση το σχήμα και από προηγούμενο ερώτημα λύνουμε την $f(x)<g(x)$.

Τώρα από το σχήμα βλέπουμε $xo<\frac{\pi}{2}$ άρα τελικά η (Β) έχει λύση: $x\in[0,xo)\cup(2,3]$