ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

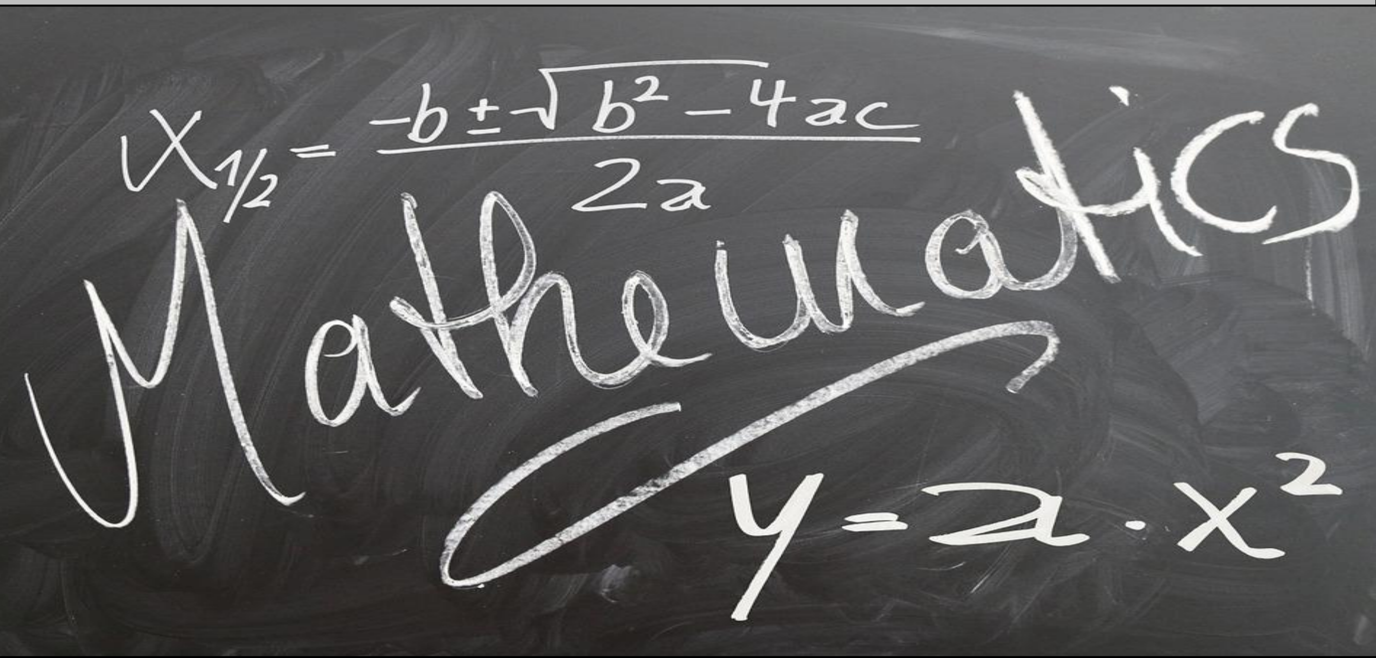
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

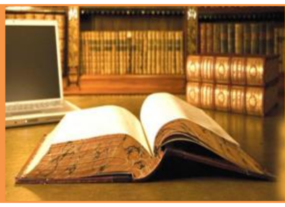
-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

2019-2020

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Επαναληπτική άσκηση στην συνέχεια και στα θεωρήματα συνέχειας



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

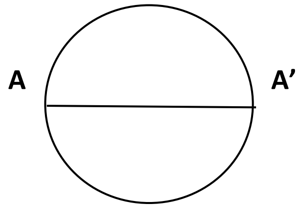
$f(\pi - x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = g(2\pi)$.

α) Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1 και ότι γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $xo \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε $g(xo) = g(xo + \pi)$.

γ) Αν η g έχει μοναδική ρίζα την $x = \alpha$, $\alpha < 0$ και $g(\rho) > 0$ για κάποιο $\rho > \alpha$, να δείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > \alpha$.

δ) Αν η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου που τρέχει στην κυκλική πίστα του διπλανού σχήματος δίνεται από την συνάρτηση $h(x) = g(x)$, $x \epsilon [0,2\pi]$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον αντιδιαμετρικά σημεία της ευθείας ΑΑ’ στα οποία κινείται με την ίδια ταχύτητα.



ε) Αν $f([0,1]) = g([0,1]) = [0,1]$ τότε να δείξετε ότι υπάρχουν $x1, x2, x3 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $f(\pi - x1) + f(\pi - x2) + g(x3) = 2$.

Νίκος Τούντας

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

α) $f(\pi - x) = f(x)$ για $x = \pi$: $f(0) = f(\pi)$ **άρα η f δεν είναι 1-1.**

Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο της Cf και $M'(\alpha', \beta')$ το συμμετρικό του σημείο ως προς την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$ τότε:

$\begin{cases} \frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \beta' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi - \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases}$ **Επομένως αρκεί να δείξουμε την ισοδυναμία:**

$\mathbf{M(\alpha,\beta) \in Cf \Leftrightarrow M'(\alpha',\beta') \in Cf}$ **Πράγματι** το $M(\alpha,\beta) \in Cf \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\pi - \alpha') = \beta' \Leftrightarrow$ (Από αρχική σχέση) $\Leftrightarrow f(\alpha') = \beta' \Leftrightarrow M'(\alpha',\beta') \in Cf$

Άρα η f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $\mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $\mathbf{k(x) = g(x) - g(x+\pi)}$, $\mathbf{x \in [0,\pi]}$

Η k είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών.

$k(0) = g(0) - g(\pi)$ και $k(\pi) = g(\pi) - g(2\pi)$ άρα

$$\mathbf{k(0) \cdot k(\pi)} = \big(g(0) - g(\pi)\big)\big(g(\pi) - g(2\pi)\big) =$$

$.= g(0)g(\pi) - g(0)g(2\pi) - g^2(\pi) + g(\pi)g(2\pi) = -g^2(0) + 2g(0)g(\pi) - g^2(\pi) =$

$= -\mathbf{\big(g(0) - g(\pi)\big)^2 \leq 0}$

Αν $\mathbf{g(0) = g(\pi)}$ τότε: $k(0) \cdot k(\pi) = 0 \Leftrightarrow k(0) = 0$ ή $k(\pi) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(0) = g(\pi)$ ή $g(\pi) = g(2\pi)$ Άρα $xo = 0$ ή $xo = \pi$.

Αν $\mathbf{g(0) \neq g(\pi)}$ τότε: $k(0) \cdot k(\pi) < 0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει $xo \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $k(xo) = 0 \Leftrightarrow g(xo) = g(xo + \pi)$.

Άρα υπάρχει $\mathbf{xo \in [0,\pi]}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{g(xo) = g(xo+\pi)}$.

γ) Έστω ότι υπάρχει $\xi \neq \rho$ τέτοιο ώστε $g(\xi) < 0$

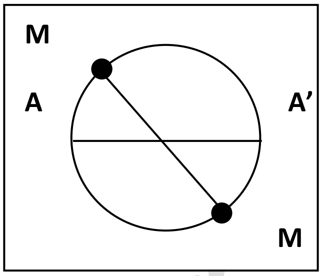
Αν $\xi > \rho$: Τότε η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\rho,\xi]$ και

$g(\rho) > 0$ και $g(\xi) < 0$ άρα $g(\rho)g(\xi) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x1 \in (\rho,\xi)$ τέτοιο ώστε $g(x1) = 0$ ΑΤΟΠΟ.

Ομοίως αν $\alpha < \xi < \rho$.

Άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x > \alpha$.

δ) Έστω x ακτίνια η απόσταση τυχαίου σημείου Μ από το Α με $x\epsilon[0,2\pi]$. Τότε το αντιδιαμετρικό ως προς την ευθεία ΑΑ' του Μ θα είναι το σημείο Μ' το οποίο θα απέχει από το Α $\pi + x$ ακτίνια. Αφού $h(x)$ η συνάρτηση που δίνει την ταχύτητα του αυτοκινήτου στο σημείο Μ τότε η ταχύτητα στο σημείο Μ' είναι η $h(x+\pi)$ την ίδια χρονική στιγμή.



ΘΕΤΩ την συνάρτηση $\mathbf{u(x) = h(x) - h(x+\pi) = g(x) - g(x+\pi), x \in [0, 2\pi]}$

Από β ερώτημα ισχύει ότι υπάρχει $\mathbf{xo \in [0, \pi]}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{g(xo) = g(xo+\pi)}$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων ως προς την ευθεία ΑΑ' στα οποία το αυτοκίνητο έχει την ίδια ταχύτητα.

ε) Υποδιαιρούμε το [0,1] σε τρία υποδιαστήματα κοινού μήκους με τον παρακάτω τρόπο.

$$\mathbf{2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1}$$

Ισχύει ότι $f([0,1]) = [0,1] = g([0,1])$ και $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \in f([0,1]) = g([0,1])$ άρα υπάρχουν:

1. $x1 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x1) = \frac{1}{3}$
2. $x2 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x2) = \frac{2}{3}$
3. $x3 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $g(x3) = 1$

Προσθέτωντας κατά μέλη τις (1),(2),(3):

$.f(x1) + f(x2) + g(x3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 \Leftrightarrow f(\pi - x1) + f(\pi - x2) + g(x3) = 2$

Άρα υπάρχουν $\mathbf{x1, x2, x3 \in [0, 1]}$ τέτοια ώστε: $\mathbf{f(\pi - x1) + f(\pi - x2) + g(x3) = 2}$