40η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)+x\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x-xf'(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$, $x\neq 0$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x)\geq 1-\frac{x}{e}$ για κάθε $x\in[0,x_0]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να γίνει αντιπροσωπευτικό σχήμα.

δ) Έστω $g(x)=f(x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την παράγωγο της g^{-1} αν γνωρίζετε ότι είναι παραγωγίσιμη.

ε) Να εξετάσετε αν οι C_g και $C_{g^{-1}}$ έχουν παράλληλες εφαπτομένες.

στ) Αν $I_\nu=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^\nu(x)dx$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι $I_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Για $x=0$: $f(0)=1$

$f(x)+x\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x-xf'(x)\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x\Leftrightarrow$

$(xf(x))'=(x\sigma\upsilon\nu x)'\Leftrightarrow xf(x)=x\sigma\upsilon\nu x+C$, $x\in\mathbb{R},\ C\in\mathbb{R}$.

Για $x=-\frac{\pi}{2}$: $C=0$ άρα είναι: $xf(x)=x\sigma\upsilon\nu x$ και για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x\ , & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}=\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{x}{e}-1=\sigma\upsilon\nu x+\frac{x}{e}-1$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με παράγωγο $g'(x)=-\eta\mu x+\frac{1}{e}$.

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow -\eta\mu x+\frac{1}{e}=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{e}$ (1) και επειδή $0<\frac{1}{e}<1$ υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$\eta\mu x_0=\frac{1}{e}$ άρα η (1) γίνεται $\eta\mu x=\eta\mu x_0 \overset{\eta\mu x\nearrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x=x_0$.

$g'(x)>0\Leftrightarrow -\eta\mu x+\frac{1}{e}>0\Leftrightarrow \eta\mu x<\frac{1}{e}\Leftrightarrow \eta\mu x<\eta\mu x_0 \overset{\eta\mu x\nearrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x<x_0$

Για κάθε $x\in(0,x_0)$ είναι $g'(x)>0$ και η g είναι συνεχής στο $[0,x_0]$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Άρα για κάθε $x\in[0,x_0]$ ισχύει ότι

$g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow f(x)+\frac{x}{e}-1\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 1-\frac{x}{e}$

γ) $f(x)=x^2\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=x^2\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-x^2=0$. Έστω η συνάρτηση $k(x)=\sigma\upsilon\nu x-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $k'(x)=-\eta\mu x-2x$ και παρατηρούμε ότι $k'(0)=0$. Επίσης η k' ίναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $k''(x)=-\sigma\upsilon\nu x-2<0\Rightarrow k'\searrow\mathbb{R}$.

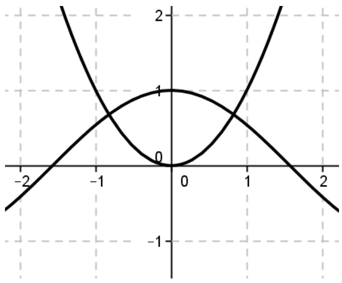
Για κάθε $x<0\overset{k'\searrow}{\Leftrightarrow}k'(x)>k'(0)=0$ και επειδή η k είναι συνεχής στο μηδέν τότε $k\nearrow(-\infty,0]$

Για κάθε $x>0\overset{k'\searrow}{\Leftrightarrow}k'(x)<k'(0)=0$ και επειδή η k είναι συνεχής στο μηδέν τότε $k\searrow[0,+\infty)$.

Είναι $k\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{4}<0$, $k(0)=1>0$ και $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{4}<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano σε καθένα

από τα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ υπάρχουν $x_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε

$k(x_1)=k(x_2)=0$ και επειδή $k\nearrow(-\infty,0]$ και $k\searrow[0,+\infty)$ τα x_1,x_2 είναι μοναδικά άρα η εξίσωση $f(x)=x^2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια σχεδιάζοντας τις $y=\sigma\upsilon\nu x$ και $y=x^2$ παρατηρούμε ότι έχουν ακριβώς δύο σημεία τομής.



δ) Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Η g είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ως παραγωγίσιμη και $g\searrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα:

$$g\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(\lim_{x\to 0}f(x),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)\right)=(0,1)=D_{g^{-1}}$$

1^{ος} τρόπος: Είναι $g^{-1}(g(x))=x\overset{\text{Παραγωγίζοντας την σχέση}}{\Rightarrow}\left(g^{-1}\right)'(g(x))\cdot g'(x)=1\Leftrightarrow\left(g^{-1}\right)'(\sigma\upsilon\nu x)\cdot(-\eta\mu x)=1\ \ (1)$

Ισχύει ότι $0<x<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Leftrightarrow}0<\eta\mu x<1$ άρα η (1) γίνεται: $\left(g^{-1}\right)'(\sigma\upsilon\nu x)=-\frac{1}{\eta\mu x}$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x=u$ με $u\in(0,1)$ και είναι $\sigma\upsilon\nu x=u\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x=u^2\Leftrightarrow1-\eta\mu^2x=u^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\eta\mu^2x=1-u^2\underset{u^2+1>0}{\overset{0<\eta\mu x<1}{\Leftrightarrow}}\eta\mu x=\sqrt{1-u^2}$

Άρα η (1) γίνεται $\left(g^{-1}\right)'(u)=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, $u\in(0,1)$

2^{ος} τρόπος: Είναι $g\left(g^{-1}(x)\right)=x\overset{\text{Παραγωγίζοντας την σχέση}}{\Rightarrow}g'\left(g^{-1}(x)\right)\cdot\left(g^{-1}\right)'(x)=1\Leftrightarrow-\eta\mu g^{-1}(x)\cdot\left(g^{-1}\right)'(x)=1\ \ (2)$

Επίσης είναι $g\left(g^{-1}(x)\right)=x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu g^{-1}(x)=x\ \ \ (3)$

$\eta\mu^2g^{-1}(x)+\sigma\upsilon\nu^2g^{-1}(x)=1\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\eta\mu^2g^{-1}(x)+x^2=1\Leftrightarrow\eta\mu g^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ \ (4)$

Γιατί $\eta\mu g^{-1}(x)>0$ στο $(0,1)$ και άρα έχουμε: $(2)\Leftrightarrow\left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},x\in(0,1)$

ε) Έστω $A(\alpha,g(\alpha))$, με $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, σημείο της C_g.

Η εφαπτομένη της C_g στο Α είναι: $y=g'(\alpha)x-g'(\alpha)\alpha+g(\alpha)$

Έστω $B\left(\beta,g^{-1}(\beta)\right)$, με $\beta\in(0,1)$, σημείο της $C_{g^{-1}}$.

Η εφαπτομένη της $C_{g^{-1}}$ στο Β είναι: $y=\left(g^{-1}\right)'(\beta)x-\left(g^{-1}\right)'(\beta)\beta+g^{-1}(\beta)$

Για να είναι παράλληλες οι δύο ευθείες πρέπει $g'(\alpha)=\left(g^{-1}\right)'(\beta)\qquad(1)$

Είναι $g'(x)=-\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Επομένως η (1) είναι αδύνατη άρα δεν έχουν παράλληλες εφαπτομένες.

στ) $I_\nu=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^{\nu}(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\ \sigma\upsilon\nu x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\ (\eta\mu x)'\ dx=$

$=\left[\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\,\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}+(\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\ \eta\mu^2x\ dx=0+(\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)dx=$

$=+(\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x-\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\right)dx=+(\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\ dx-(\nu-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\ dx==(\nu-1)I_{\nu-2}-(\nu-1)I_\nu$

, άρα $I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}-(\nu-1)I_\nu\Leftrightarrow\nu I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}\Leftrightarrow I_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}$