ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 8

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία η κλίση της σε κάθε σημείο της (x,f(x)) δίνεται από τον τύπο $-\dfrac{2}{x^2}$. Αν η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο Λ(1,3), τότε

i. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2+x}{x}$, x>0.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1}, την οποία και να προσδιορίσετε.

iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της f^{-1}.

iv. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fof^{-1} και $f^{-1}of$ οι οποίες να εξετάσετε αν είναι ίσες.

v. Να υπολογίσετε τα

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{(fof^{-1})(x)-1}$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-1}{\left|\eta\mu x-(f^{-1}of)(x)\right|}$

vi. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(e^x\right)>f^{-1}\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$.

vii. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

viii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των των f και f^{-1} και τις ευθείες x=2 και x=λ με το λ>2.

ix. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ>2 ώστε το παραπάνω εμβαδό να γίνεται μέγιστο.

x. Υλικό σημείο Μ κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και απομακρύνεται από τον άξονα τον yy΄με ταχύτητα η οποία μειώνεται 4μ/sec. Τη χρονική στιγμή που περνά από σημείο με τετμημένη 4, βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 2 ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$f'(x) = -\frac{2}{x^2} = \left(\frac{2}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{x} + c,\ c \in \mathbb{R},\ \forall x>0.$ (1)

Αφού η C_f διέρχεται από το $A(1,3)$, είναι $f(1)=3 \xrightarrow{(1)} c=1$.

Άρα, $f(x) = \frac{2}{x} + 1 = \frac{2+x}{x},\ x>0$.

ii) Η f είναι συνεχής και $f'(x)<0,\ \forall x>0$. Οπότε, $f \searrow (0,+\infty)$, δηλαδή 1-1. Άρα, η f αντιστρέφεται. Είναι:

$D_{f^{-1}} = f((0,+\infty)) \overset{f:\searrow}{=\!=} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right) = (1,+\infty)$, αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right) = 0+1 = 1$ και
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right) = (+\infty)+1 = +\infty$.

Ισχύει: $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y),\ \forall x>0$ και $y>1$. Έστω $f(x)=y$. Έχουμε:

$\frac{2}{x}+1=y \Leftrightarrow \frac{2}{x} = y-1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{2}{y-1},\ \forall y>1.$

Άρα, $f^{-1}(x) = \frac{2}{x-1},\ x>1$.

iii) Για τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι: $f(x)=f^{-1}(x)$. (2)

Πρέπει $x>0$ και $x>1$, οπότε $x>1$. Η (2) για $x>1$ γίνεται:

$2(x-1)+x(x-1) = 2x \Leftrightarrow \cancel{2x}-2+x^2-x = \cancel{2x} \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} x=2.$

Άρα, $C_f \cap C_{f^{-1}} = K(2,2)$.

iv) • Για την $f \circ f^{-1}$:

Πρέπει: $\begin{cases} x \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow x>1 \\ f^{-1}(x) \in D_f \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x>1 \end{cases}$. Οπότε, $D_{f\circ f^{-1}} = (1,+\infty)$

Είναι: $(f\circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{2}{f^{-1}(x)}+1 \Leftrightarrow (f\circ f^{-1})(x) = x,\ x>1$

• Για την $f^{-1}\circ f$:

Πρέπει: $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow x>0 \\ f(x) \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow \frac{2}{x}+\cancel{1} > \cancel{1} \Leftrightarrow x>0 \end{cases}$ Οπότε, $D_{f^{-1}\circ f} = (0,+\infty)$

Είναι: $(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{2}{f(x)-1} \Leftrightarrow (f^{-1}\circ f)(x) = x,\ x>0.$

Αφού $D_{f\circ f^{-1}} \neq D_{f^{-1}\circ f}$, είναι $f\circ f^{-1} \neq f^{-1}\circ f$.

v) α) Είναι: $\lim_{x\to1}[(f\circ f^{-1})(x)-1]=\lim_{x\to1}(x-1)=0$ και $x>1\Leftrightarrow x-1>0$. Οπότε:

$\lim_{x\to1}\frac{1}{[(f\circ f^{-1})(x)-1]}=+\infty$ Άρα, $\lim_{x\to1}\frac{2x}{[(f\circ f^{-1})(x)-1]}=2\cdot(+\infty)=+\infty$

β) Είναι: $\lim_{x\to0}|\eta\mu x-(f^{-1}\circ f)(x)|=\lim_{x\to0}|\eta\mu x-x|=0$ και $|\eta\mu x-x|\geq0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Οπότε: $\lim_{x\to0}\frac{1}{|\eta\mu x-(f^{-1}\circ f)(x)|}=+\infty$. Άρα, $\lim_{x\to0}\frac{3x-1}{|\eta\mu x-(f^{-1}\circ f)(x)|}=-\infty$.

vi) Πρέπει: $\left.\begin{cases} e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0 \xLeftrightarrow{e^x:\uparrow} x>0 \\ \cancel{1}+x+\frac{x^2}{2}>\cancel{1}\Leftrightarrow x(x+2)>0\Leftrightarrow x<-2,\ x>0\end{cases}\right\}\Leftrightarrow x>0.$

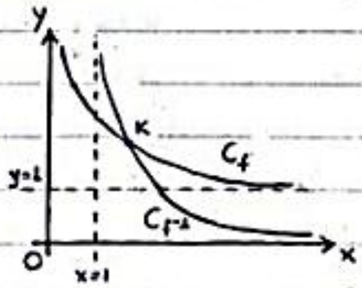
Είναι: $(f^{-1}(x))'=-\frac{2}{(x-1)^2}<0,\ \forall x>1$. Αφού η f^{-1} είναι συνεχής, είναι $f^{-1}\downarrow(1,+\infty)$. Έχουμε:

$$f^{-1}(e^x)>f^{-1}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\xLeftrightarrow{f^{-1}:\downarrow} e^x<1+x+\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow e^x-\frac{x^2}{2}-x-1<0 \quad (3)$$

Έστω $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι: $g'(x)=e^x-x-1\geq0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ("=" μόνο για $x=0$) και η g είναι συνεχής. Οπότε, $g:\uparrow$

Έτσι, η (3) $\Leftrightarrow g(x)<g(0)\xLeftrightarrow{g:\uparrow} x<0 \xrightarrow{x>0}$ ΑΔΥΝΑΤΗ.

vii) Είναι $f''(x)=4/x^3>0,\ \forall x>0$. Άρα, η C_f είναι κυρτή. Είναι $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$, οπότε η C_f έχει ασύμπτωτες τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y=1$. Η $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y=x$ και τέμνονται στο $K(2,2)$. Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ φαίνονται παρακάτω:



viii) Όπως φαίνεται, είναι $f(x)>f^{-1}(x),\ \forall x>2$. Είναι:

$$E(\lambda)=\int_2^\lambda|f(x)-f^{-1}(x)|dx=\int_2^\lambda(f(x)-f^{-1}(x))dx=\int_2^\lambda f(x)dx-\int_2^\lambda f^{-1}(x)dx=$$

$$=\int_2^\lambda\left(\frac{2}{x}+1\right)dx-\int_2^\lambda\frac{2}{x-1}dx=[2\ln x+x]_2^\lambda-[2\ln(x-1)]_2^\lambda=$$

$$=2\ln\lambda+\lambda-2\ln2-2-2\ln(\lambda-1)+2\ln1\ \rightarrow$$

$$\rightarrow E(\lambda)=2\ln\frac{\lambda}{\lambda-1}+\lambda-2-2\ln2,\quad \lambda>2.$$

ix) Είναι:

$$E'(\lambda) = \frac{2}{\lambda} + 1 - \frac{2}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^2 - \lambda - 2}{\lambda(\lambda-1)} \rightarrow E'(\lambda) = \frac{(\lambda-2)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)} > 0, \quad \forall \lambda > 2$$

Η Ε είναι συνεχής. Οπότε, $E \nearrow (2, +\infty)$. Άρα, δεν υπάρχει τιμή του $\lambda > 2$, ώστε το εμβαδόν Ε να γίνεται μέγιστο.

x) Είναι: $x'(t) = -4\ m/s$ και $x(t_0) = 4m$. Είναι:

$y(t) = \frac{2}{x(t)} + 1$. Οπότε, $y'(t) = -\frac{2x'(t)}{x^2(t)}$.

Άρα, $y'(t_0) = -\frac{2 \cdot (-4\ m/s)}{(4\ m)^2} \rightarrow y'(t_0) = \frac{1}{2}\ m/s$.

Επιμέλεια λύσης: Ελευθερίου Ν.