

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 5

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

Δίνεται συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη για την οποία

- $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$  για κάθε  $x > 0$
- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x}$ 
  - i. Να δείξετε ότι  $f(1) = 0$ .
  - ii. Να δείξετε ότι  $f(x) = (x-1)\ln x$ , για κάθε  $x > 0$ .
  - iii. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
  - iv. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^{x-1} = e^{2018}$ , με  $x > 0$ , έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες τις  $x_1, x_2$ .
  - v. Αν  $x_1 < x_2$ , δείξτε ότι υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  ώστε  $f'(x_0) + f(x_0) = 2018$ .
  - vi. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = e^x + \alpha - 1$ .
  - vii. Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:  
 $2x \ln(x+1) - (x-1) \ln x < (x+1) \ln(x+2)$
  - viii. Για  $x > 0$ , να λύσετε την εξίσωση:  $ef(e) + e^x = (2e-1)x$ .
  - ix. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $xx'$  και την ευθεία  $X=e$ .
  - x. Αν  $1 < \alpha < \beta$  να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - e^x$ , με  $x \in [\alpha, \beta]$ 
    - α. παρουσιάζει μέγιστο.
    - β. ικανοποιεί τη σχέση  $\alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta < \ln \frac{\alpha}{\beta} + \frac{e^\beta - e^\alpha}{e^{\alpha+\beta}}$ .

i) Έχουμε:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH.}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1} = e^0 - 1 \Rightarrow f(1) = 0.$$

ii)  $\forall x > 0$  έχουμε:

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = (x)' \ln x + x (\ln x)' - (\ln x)' = (x \ln x - \ln x)' = [(x-1) \ln x]' \Rightarrow f(x) = (x-1) \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Όμως, } f(1) = 0 \Rightarrow c = 0. \text{ Άρα, } f(x) = (x-1) \ln x, \quad x > 0.$$

iii) Είναι:

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Αφού η  $f'$  είναι συνεχής, είναι:  $f': I$

Οπότε έχουμε:

$$\bullet \forall 0 < x < 1 \stackrel{f':f}{\iff} f'(x) < f'(1) \iff f'(x) < 0. \text{ Άρα, } f \downarrow (0, 1].$$

$$\bullet \forall x > 1 \stackrel{f':f}{\iff} f'(x) > f'(1) \iff f'(x) > 0. \text{ Άρα, } f \uparrow [1, +\infty)$$

iv) Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$x^{x-1} = e^{2018} \stackrel{x>0}{\iff} \ln x^{x-1} = \ln e^{2018} \iff (x-1) \ln x = 2018 \iff f(x) = 2018 \quad (1)$$

Η  $f$  είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, οπότε:

$$\bullet f((0, 1]) \stackrel{f':f}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [0, +\infty), \text{ αφού:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1) \ln x] = (0-1) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\bullet f([1, +\infty)) \stackrel{f':f}{=} [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty), \text{ αφού:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1) \ln x] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Παρατηρούμε πως  $2018 \in f((0, 1])$  και  $f \downarrow (0, 1]$ , άρα υπάρχει μοναδικό  $x_1 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε:  $f(x_1) = 2018 \stackrel{(1)}{\iff} x_1^{x_1-1} = e^{2018}$ . Ομοίως, υπάρχει μοναδικό  $x_2 \in (1, +\infty)$  τέτοιο, ώστε:  $f(x_2) = 2018 \stackrel{(1)}{\iff} x_2^{x_2-1} = e^{2018}$ .

v) Είναι:

$$\bullet 0 < x_1 < 1 \stackrel{f':f}{\iff} f'(x_1) < f'(1) \iff f'(x_1) < 0$$

$$\bullet x_2 > 1 \stackrel{f':f}{\iff} f'(x_2) > f'(1) \iff f'(x_2) > 0$$

$$\text{Οπότε, } f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$$

Έστω  $h(x) = f'(x) + f(x) - 2018, \quad x > 0$ , που είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε:

$$\bullet h(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2018 \xrightarrow{f(x_1) = 2018} h(x_1) = f'(x_1)$$

$$\bullet h(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2018 \xrightarrow{f(x_2) = 2018} h(x_2) = f'(x_2)$$

Οπότε,  $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$ .

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Βολζανο, υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε:  $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2018$ .

vi) Έστω  $t(a) = e^a + a - 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με  $t'(a) = e^a + 1 > 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , οπότε  $t(\mathbb{R}) = (\lim_{a \rightarrow -\infty} t(a), \lim_{a \rightarrow +\infty} t(a)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ , αφού:

$$\bullet \lim_{a \rightarrow -\infty} t(a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^a + a - 1) = 0 + (-\infty) - 1 = -\infty$$

$$\bullet \lim_{a \rightarrow +\infty} t(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^a + a - 1) = (+\infty) + (+\infty) - 1 = +\infty$$

Επομένως:  $t(a) < t(0) = 0$ ,  $\forall a < 0$  και  $t(a) > t(0) = 0$ ,  $\forall a > 0$ .

Ακόμη  $t(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ . Άρα:

• Αν  $a < 0$ , η εξίσωση  $f(x) = t(a)$  είναι αδύνατη, αφού  $f(x) \geq 0$  και  $t(a) < 0$ .

• Αν  $a = 0$ , η εξίσωση  $f(x) = t(a) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x = 1$ .

• Αν  $a > 0$ , η εξίσωση  $f(x) = t(a)$  έχει δύο ρίζες, αφού  $f((0, 1)) = (0, +\infty)$ ,  $f((1, +\infty)) = (0, +\infty)$  και  $t(a) > 0$ .

vii)  $\forall x > 0$  έχουμε:

$$2x \ln(x+1) - (x-1) \ln x < (x+1) \ln(x+2) \Leftrightarrow 2f(x+1) - f(x) < f(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f(x+2) - f(x+1) \Leftrightarrow \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} < \frac{f(x+2) - f(x+1)}{(x+2) - (x+1)} \quad (2)$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[x, x+1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, x+1)$ ,  $\forall x > 0$ .

Οπότε, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει  $\xi_1 \in (x, x+1)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \quad \text{Ομοίως, υπάρχει } \xi_2 \in (x+1, x+2) \text{ τέτοιο, ώστε:}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{x+2 - (x+1)} \quad \text{Η (2)} \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \xrightarrow{f': f} \xi_1 < \xi_2, \text{ που ισχύει.}$$

viii) Έχουμε:

$$e f(e) + e^2 = (2e-1)x \Leftrightarrow e(e-1) + e^2 = (2e-1)x \Leftrightarrow e^2 - e + e^2 = (2e-1)x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(2e-1) = (2e-1)x \Leftrightarrow x = e.$$

ix) Η  $C_2$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $K(1, 0)$ . Η  $f$  είναι συνεχής και ισχύει  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [1, e]$ . Έχουμε:

$$E = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \ln x dx =$$

$$= \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} - x \right) (\ln x)' dx = \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{x}{2} - 1 \right) dx = \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \left[ \frac{x^2}{4} - x \right]_1^e \Rightarrow E = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ τ.μ.}$$

κ) α) Η  $g$  είναι συνεχής στο κλειστό  $[a, b]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής, η  $g$  παρουσιάζει μέγιστο στο  $[a, b]$ .

β) Για  $1 < a < b$  έχουμε:

$$a \ln a - b \ln b < \ln \frac{a}{b} + \frac{e^b - e^a}{e^{a+b}} \Leftrightarrow a \ln a - b \ln b < \ln a - \ln b + \frac{e^b}{e^{a+b}} - \frac{e^a}{e^{a+b}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \ln a - \ln a - e^{b-a-b} < b \ln b - \ln b - e^{a-a-b} \Leftrightarrow (a-1) \ln a - e^{-a} <$$

$$< (b-1) \ln b - e^{-b} \Leftrightarrow f(a) - e^{-a} < f(b) - e^{-b} \Leftrightarrow g(a) < g(b) \quad (3)$$

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων με  $g'(x) = f'(x) + e^{-x}$ . Όμως,  $g'(x) > 0$ ,  $\forall x \in [a, b] \subseteq (1, +\infty)$ , οπότε  $g \uparrow [a, b]$ . Άρα, η (3)  $\Leftrightarrow$   $\underline{g(a)} < b$ , που ισχύει.

Επιμέλεια λύσης: Ελευθερίου Ν.