



ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
(ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ)**

21 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Α (15min)

A. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $xO\psi$ και $x'O\psi'$.

Μονάδες 10

B. Πότε μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

i. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in A$.

ii. Μια συνάρτηση f λέγεται, γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ , αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.

iii. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f , ως προς τον άξονα $x'x$.

v. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.



ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

ΘΕΜΑ Β (30 min)

Δίνεται η συνάρτηση $f \circ g$ με τύπο $(f \circ g)(x) = x^{-1} - \ln x - 1, x > 0$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln x, x > 0$.

i. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 3

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f[f^{-1}(x) - 1 + e] = e, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

iv. Δείξτε ότι $f(x) \cdot f(-x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Μονάδες 5

v. Έστω συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{-h(x)} - \frac{1}{e^{x^2+1}} + 2x = h(x) - (x-1)^2, x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $h(x) = x^2 + 1$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η h δεν αντιστρέφεται.

Μονάδες 3



ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

ΘΕΜΑ Γ (50 min)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
Είναι οι συναρτήσεις f και f^{-1} ίσες; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

- ii. Με τη βοήθεια της συνάρτησης f ή οποιασδήποτε άλλης συνάρτησης g , να δικαιολογήσετε ότι δεν είναι πάντα σωστός ο ισχυρισμός << Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης και της γραφικής παράστασης της αντίστροφής της, όταν υπάρχουν, βρίσκονται πάντα, πάνω στην $y=x$ >>.

Μονάδες 3

Έστω $(f \circ f)(x) = ax + \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $x \neq 1$

- iii. Να δείξετε ότι $a=1$ και $\beta=0$.

Μονάδες 5

$$\text{Αν } g(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) + 3, & x > 1 \\ 4 - (x-1)^2, & x \leq 1 \end{cases}$$

- iv. α. Να γίνει η γραφική παράσταση της g και με τη βοήθειά της βρείτε την μονοτονία και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

- β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$g(x) = \lambda + 4, \lambda \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 3

v. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = e^{1-x} + 3$.

Μονάδες 4



ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

ΘΕΜΑ Δ(70 min)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^v + 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$.

- i. Βρείτε τις δυνατές τιμές του $v \in \mathbb{N}^*$, για τις οποίες η f αντιστρέφεται. **Μονάδες 2**
- ii. Για τις τιμές του i ερωτήματος να λύσετε την εξίσωση $f(x^3 + 1) - f(3 - x) = f(1 - x) - f(x^3 - 1)$ **Μονάδες 3**

Για την ελάχιστη τιμή του $v \in \mathbb{N}^*$ για την οποία η f δεν αντιστρέφεται ορίζουμε την συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) - 2x$, $x \leq 1$.

- iii. α. Να βρείτε την g^{-1} και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g και της g^{-1} δεν έχουν κοινά σημεία. **Μονάδες 3**
- β. Να λύσετε την εξίσωση $3g(x+3) + 2g(5-x^2) = 10$. **Μονάδες 4**
- γ. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι $g(x) \geq 3 - e^x - \lambda$ **Μονάδες 5**
- iv. Να ορίσετε την $g^{-1} \circ h$ όπου $h(x) = x^2 + 2$ και να κάνετε την γραφική της παράσταση. **Μονάδες 3**
- v. Έστω M τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της $g^{-1} \circ h$, με $x_M > 0$. Αν A η προβολή του M στον άξονα $x'x$, B το σημείο τομής της $C_{g^{-1} \circ h}$ με τον yy' και O η αρχή των αξόνων,

α. Δείξτε ότι το εμβαδό $E(x)$ του τετραπλεύρου που ορίζουν

τα σημεία O, A, M, B ισούται με $E(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 2x}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2}, & x > 1 \end{cases}$.

Μονάδες 3

β. Να λύσετε την εξίσωση $E(x^3) = \frac{3}{8}$

Μονάδες 3

ASKISOPOLIS