ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:*

α) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ , με πλευρές α , β , γ , ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

β) Δίνεται ένας κύκλος (O,R). Για την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στο κύκλο ισχύει $\lambda_4=R\sqrt{2}$.

γ) Σε τρίγωνο ΑΒΓ , με πλευρές α , β , γ , ισχύει $\text{συν}A=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$.

δ) Όταν ένα πολύγωνο έχει ίσες όλες τις πλευρές του είναι κανονικό**.**

ε) Δύο ισοδύναμα σχήματα είναι ίσα.

Μονάδες 10

Α2. Να αποδείξετε ότι: « Αν μία γωνία τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. »

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=3, ΒΓ=5 και ΑΓ=7.

Β1. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Μονάδες 9

Β2. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

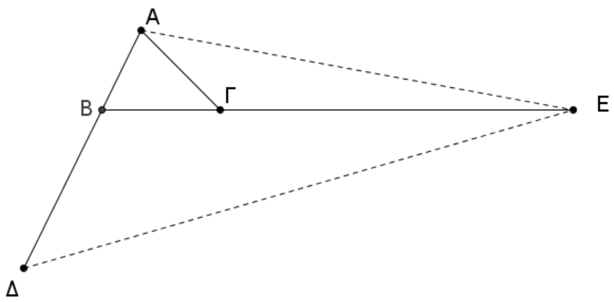
Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ στη πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά του ΑΒ προς το Β κατά ΒΔ = 2ΑΒ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά ΓΕ=3ΒΓ.



Γ1. α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ ως συνάρτηση του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 9

β) Να δείξετε ότι (ΑΔΕ) = 12(ΑΒΓ).

Μονάδες 8

Γ2. Αν ΑΒ=4 , ΑΓ=2$\sqrt{3}$ και $\hat{A} = 60^0$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Τρεις κύκλοι $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$ και (O_3, R_3) εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία Α, Β και Γ. Αν $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$ και $R_3 = 2 - \sqrt{2}$, τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο.

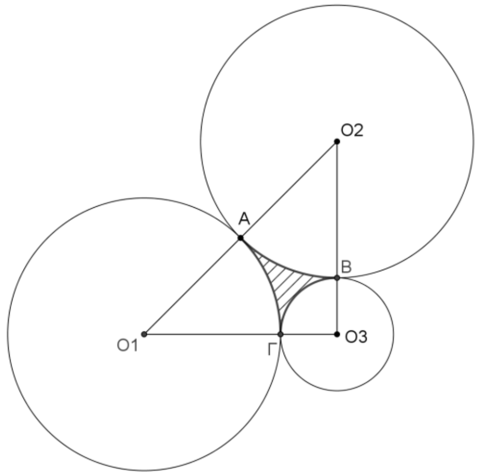
Μονάδες 10

Δ2. Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8



ΠΕΡΙΣΤΕΡΙ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ **ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ:**

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Λ , β) Σ , γ) Σ , δ) Λ , ε) Λ

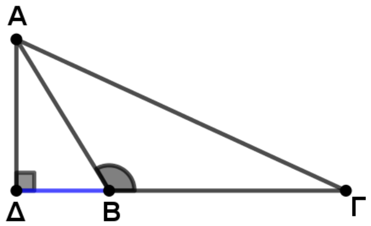
Α2.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $ΑΓ^2 = 49$ και $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 9 + 25 = 34$, άρα $ΑΓ^2 > ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow \hat{B} > 90^o$.

Β2. $συνΒ = \dfrac{α^2 + γ^2 - β^2}{2αγ} = \dfrac{9 + 25 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\dfrac{1}{2}$, άρα $\hat{B} = 120^o$.

Β3. $\hat{B} > 90^o$ άρα



$$ΑΓ^2 = ΒΑ^2 + ΒΓ^2 + 2ΒΓ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow$$

$$ΒΔ = \frac{ΑΓ^2 - ΒΑ^2 - ΒΓ^2}{2ΒΓ} = \frac{49 - 9 - 25}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ , ΑΒΓ έχουν $Α\hat{B}Γ + Ε\hat{B}Δ = 180^o$, άρα

$$\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΒΕ \cdot ΒΔ}{ΒΑ \cdot ΒΓ} = \frac{4 \cdot ΒΓ \cdot 2 \cdot ΑΒ}{ΒΑ \cdot ΒΓ} = 8 \Leftrightarrow (ΒΔΕ) = 8 \cdot (ΑΒΓ).$$

β) Τα τρίγωνα ΑΓΕ , ΑΒΓ έχουν $Α\hat{Γ}Β + Α\hat{Γ}Ε = 180^o$, άρα

$$\frac{(ΑΓΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΓΑ \cdot ΓΕ}{ΓΑ \cdot ΓΒ} = \frac{ΓΑ \cdot 3 \cdot ΓΒ}{ΓΑ \cdot ΒΓ} = 3 \Leftrightarrow (ΑΓΕ) = 3 \cdot (ΑΒΓ).$$

Οπότε

$$(ΑΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΒΔΕ) + (ΑΓΕ) = (ΑΒΓ) + 8 \cdot (ΑΒΓ) + 3 \cdot (ΑΒΓ) = 12 \cdot (ΑΒΓ).$$

Γ2. $(ΑΒΓ) = \dfrac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ = \dfrac{1}{2} 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot ημ60^0 = 6$.

Άρα $(ΑΔΕ) = 12 \cdot (ΑΒΓ) = 12 \cdot 6 = 72$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, οπότε οι διάκεντροι διέρχονται από τα σημεία επαφής και είναι ίσες με το άθροισμα των ακτίνων τους.

Επομένως:

$$\left(O_1O_2\right)=R_1+R_2=2\sqrt{2}$$

$$\left(O_2O_3\right)=R_2+R_3=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2$$

$$\left(O_1O_3\right)=R_1+R_3=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2$$

Έχουμε: $\left(O_1O_2\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ και $\left(O_2O_3\right)^2+\left(O_1O_3\right)^2=2^2+2^2=8$,

Άρα το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο.

Δ2. Το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,

άρα $\hat{O}_1=90^o$ και $\hat{O}_2=\hat{O}_3=45^o$.

Περίμετρος: $\Pi=l_{\overset{\frown}{AB}}+l_{\overset{\frown}{A\Gamma}}+l_{\overset{\frown}{B\Gamma}}=\dfrac{\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 45^o}{180^0}+\dfrac{\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 45^o}{180^0}+\dfrac{\pi\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot 90^o}{180^0}=$

$$\frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=\pi$$

Δ3. Εμβαδόν **:** $E=\left(O_1O_2O_3\right)-\left(O_1\,\overset{\frown}{A\Gamma}\right)-\left(O_2\,\overset{\frown}{AB}\right)-\left(O_3\,\overset{\frown}{B\Gamma}\right)=$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\frac{\pi\cdot\sqrt{2}^2\cdot 45^o}{360^0}-\frac{\pi\cdot\sqrt{2}^2\cdot 45^o}{360^0}-\frac{\pi\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)^2\cdot 90^o}{360^0}=$$

$$2-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{6\pi-4\sqrt{2}\pi}{4}=2+\pi\sqrt{2}-2\pi.$$