Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Θέματα προαγωγικών εξετάσεων
Περιόδου Ιουνίου
στην Άλγεβρα

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να δείξετε ένα πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $\mathrm{P}(x)$.

Μονάδες 15

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό η Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2 x=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$,για κάθε $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$.

ii. Η παράσταση $x^a+2x^2-x+1,\alpha\in\mathbb{R}$ παριστάνει πολυώνυμο για κάθε τιμή του α.

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

iv. Η εξίσωση $\ln x=a,a\in\mathbb{R}$ έχει πάντοτε λύση .

v. Κάθε μη γραμμικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=2x^3+\alpha x^2-\beta x+6$.

Αν το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου και η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=1$ είναι ίση με -4 .

α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β.

Μονάδες 8

Αν $\alpha=1$ και β=13 :

β) Να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{P}(x)=0$

Μονάδες 9

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\mathrm{P}(x)\geq 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ3ο

α) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2xy = -1 \\ 4x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases}$.

Μονάδες 10

β) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2\eta\mu\omega\eta\mu\varphi = -1 \\ 4\eta\mu^2\omega + 4\eta\mu^2\varphi = 5 \end{cases}, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 10

γ) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi = -1 \\ 4\sigma\upsilon\nu^2\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 5 \end{cases}, \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \ln \frac{e^{2x} - e^2}{e^{2x} + e^{x+1} - e^x - e}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x} + e^{x+1} - e^x - e = 0$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln \frac{e^x - e}{e^x - 1}$.

Μονάδες 6

δ) Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln\left(e^x - e\right) - 2\ln\left(e^x - 1\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

-Ο-
Δ/ΝΤΗΣ

-ΟΙ-
ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Λύση

Α. Θεωρία
Β. ΣΛΣΣΛ

ΘΕΜΑ 2ο

Λύση

α) Το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου οπότε

$\mathrm{P}(2)=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3+\alpha\cdot 2^2-\beta\cdot 2+6=0 \Leftrightarrow 16+4\alpha-2\beta+6=0 \Leftrightarrow$

$4\alpha-2\beta=-22 \Leftrightarrow 2\alpha-\beta=-11$ (1)

Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=1$ είναι ίση με -4 οπότε

$\mathrm{P}(1)=-4 \Leftrightarrow 2\cdot 1^3+\alpha\cdot 1^2-\beta\cdot 1+6=-4 \Leftrightarrow 2+\alpha-\beta+6=-4 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-12$ (2)

Με αφαίρεση των (1),(2) έχουμε $a=1$.

$(2)\overset{a=1}{\Rightarrow} 1-\beta=-12 \Leftrightarrow \beta=13$

β) $P(x)=2x^3+x^2-13x+6.$

Από το σχήμα Horner έχουμε

2	1	-13	6	2
	4	10	-6	
2	5	-3	0	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x-2 είναι το τριώνυμο $2x^2+5x-3$.

$\Delta=5^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25+24=49$

$x_1=\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{-5-7}{4}=-\dfrac{12}{4}=-3.$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $\mathrm{P}(x)=0$ είναι οι $-3,\dfrac{1}{2},2$.

γ)

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2+5x-3$		+		−		+		+	
x-2		−		−		−		+	
P(x)		−		+		−		+	

Οπότε οι λύσεις της ανίσωσης $\mathrm{P}(x)\geq 0$ είναι η ένωση των διαστημάτων $\left[-3,\dfrac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

.

ΘΕΜΑ 3ο

α) $\begin{cases} 2xy=-1\ (1) \\ 4x^2+4y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8xy=-4 \\ 4x^2+4y^2=5 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 4x^2+4y^2+8xy=1 \Leftrightarrow$

$(2x+2y)^2=1 \Leftrightarrow \left(2x+2y=1 \Leftrightarrow x+y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}-x\ (2)\right)$ ή .

$\left(2x+2y=-1 \Leftrightarrow x+y=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}-x\ (3)\right)$

$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} 2x\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)=-1 \Leftrightarrow x-2x^2=-1 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow (x=1)$ ή $\left(x=-\frac{1}{2}\right)$.

$(2) \overset{x=1}{\Rightarrow} y=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$, $(2) \overset{x=-\frac{1}{2}}{\Rightarrow} y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} 2x\cdot\left(-\frac{1}{2}-x\right)=-1 \Leftrightarrow -x-2x^2=-1 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow (x=-1)$ ή $\left(x=\frac{1}{2}\right)$.

$(3) \overset{x=-1}{\Rightarrow} y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$, $(3) \overset{x=\frac{1}{2}}{\Rightarrow} y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$.

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι : $\left(1,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},1\right),\left(-1,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

β) Αν θέσουμε $x=\eta\mu\omega \geq 0, y=\eta\mu\varphi<0$ προκύπτει το σύστημα του α) ερωτήματος.

Άρα $x=1, y=-\frac{1}{2}$.

Επομένως $\eta\mu\omega=1=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$ και

$\eta\mu\varphi=-\frac{1}{2}=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left(\varphi=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(\varphi=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}\right)$

Επειδή $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right), \varphi\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$: $\omega=\frac{\pi}{2}$ και $\varphi=\frac{7\pi}{6}$.

γ) Αν θέσουμε $x=\sigma\upsilon\nu\omega \geq 0, y=\sigma\upsilon\nu\varphi<0$ προκύπτει το σύστημα του α) ερωτήματος.

Άρα $x=1, y=-\frac{1}{2}$.

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\omega=1=\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \omega=2\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \varphi=2\kappa\pi\pm\frac{5\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}$.

Επειδή $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right), \varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$: $\omega=0$ και $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

.

ΘΕΜΑ 4ο

Λύση

α) $e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e=0 \Leftrightarrow e^{2x}+e\cdot e^x-e^x-e=0 \Leftrightarrow e^x\left(e^x+e\right)-\left(e^x+e\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left(e^x-1\right)\underbrace{\left(e^x+e\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow e^x=1=e^0 \Leftrightarrow x=0$.

β) Πρέπει $e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και

$$\frac{e^{2x}-e^2}{e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e}>0 \Leftrightarrow \frac{\left(e^x-e\right)\cdot\cancel{\left(e^x+e\right)}}{\left(e^x-1\right)\cdot\cancel{\left(e^x+e\right)}}>0 \Leftrightarrow \frac{e^x-e}{e^x-1}>0 \Leftrightarrow \left(e^x-e\right)\left(e^x-1\right)>0$$

$e^x-e\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq e=e^1 \Leftrightarrow x\geq 1.$

$e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1=e^0 \Leftrightarrow x\geq 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x-e	$-$		$-$	$+$
e^x-1	$-$		$+$	$+$
$\left(e^x-e\right)\left(e^x-1\right)$	$+$		$-$	$+$

Άρα $A_f=\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

γ) $f\left(x\right)=\ln\frac{e^{2x}-e^2}{e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e}=\ln\frac{\left(e^x-e\right)\cdot\cancel{\left(e^x+e\right)}}{\left(e^x-1\right)\cdot\cancel{\left(e^x+e\right)}}=\ln\frac{e^x-e}{e^x-1}$

δ) A_g : Πρέπει $e^x-e>0 \Leftrightarrow e^x>e=e^1 \Leftrightarrow x>1$ και $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1=e^0 \Leftrightarrow x>0$.

οπότε $A_g=\left(1,+\infty\right)$

Επομένως το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι το $A=A_f\cap A_f=\left(1,+\infty\right)$.

Για να βρίσκεται η γραφική παράσταση της f πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g πρέπει :

$$f\left(x\right)>g\left(x\right) \Leftrightarrow \ln\frac{e^x-e}{e^x-1}>\ln\left(e^x-e\right)-2\ln\left(e^x-1\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{e^x-e}{e^x-1}>\ln\left(e^x-e\right)-\ln\left(e^x-1\right)^2 \Leftrightarrow \ln\frac{e^x-e}{e^x-1}>\ln\frac{e^x-e}{\left(e^x-1\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x-e}{e^x-1}>\frac{e^x-e}{\left(e^x-1\right)^2} \Leftrightarrow \frac{e^x-e}{e^x-1}-\frac{e^x-e}{\left(e^x-1\right)^2}>0 \Leftrightarrow \frac{\left(e^x-e\right)\left(e^x-1\right)-\left(e^x-e\right)}{\left(e^x-1\right)^2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(e^x-e\right)\left(e^x-2\right)}{\left(e^x-1\right)^2}>0 \underset{e^x-e>0}{\overset{\left(e^x-1\right)^2>0}{\Leftrightarrow}} e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$$

Επειδή $\ln 2<\ln e=1$ οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $\left(1,+\infty\right)$.