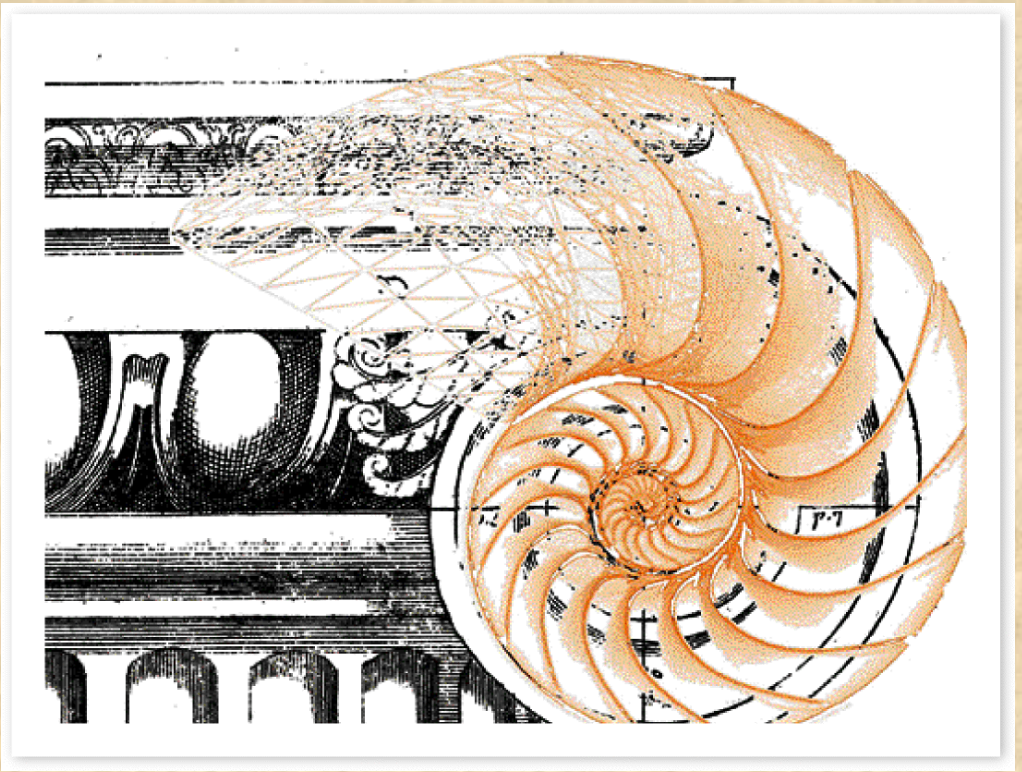
14ο Λύκειο Περιστερίου



Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

2020-21

Το βιβλίο αυτό δημιουργήθηκε για να χρησιμοποιηθεί
συμπληρωματικά στο σχολικό βιβλίο.

Σ. Μιχαήλογλου
Α. Μπλιάς
Δ. Πατσιμάς

Συναρτήσεις

Ισχυρισμοί

1. **Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
   « Αν μία κατακόρυφη ευθεία τέμνει μία καμπύλη f σε δύο σημεία , τότε η f δεν είναι συνάρτηση . »
   α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
   β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α με την βοήθεια παραδείγματος αν είναι αληθής αντιπαραδείγματος αν είναι ψευδής.

2. **Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
   «Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x)\cdot g(x)=0$ αν και μόνο αν $f(x)=0$ ή $g(x)=0$»
   α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
   β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

3. **Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
   «Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f^2(x)=g^2(x)$ αν και μόνο αν $f(x)=\pm g(x)$»
   α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
   β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

4. **Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
   «Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε $f\circ g=g\circ f$»
   α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
   β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

5. **Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
   « Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1,\Delta_2\subseteq D_f$, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα και στο σύνολο $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ ».
   α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
   β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

6. **Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
   « Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, αυτό θα ισχύει σε μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της».
   α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
   β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο ».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε είναι και γνησίως μονότονη.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

9. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι συναρτήσεις $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$ είναι ίσες».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Πεδίο ορισμού

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$ **β)** $g(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-5}$

γ) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$ **δ)** $c(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x-15}}$

ε) $d(x) = \sqrt{3-\sqrt{1-x}}$ **στ)** $k(x) = \ln(1+\ln x)$

ζ) $l(x) = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}$ **η)** $m(x) = \sqrt[3]{\ln(2-x)}$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + 2(\alpha+2)x + 8}, \alpha > 0$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

3. Δίνεται η σχέση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2}, & x \le \lambda^2 + 5\lambda \\ x\ln(x^2+1), & x \ge 3\lambda \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές του ακεραίου λ, για τις οποίες η f είναι συνάρτηση.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x+1}{3x^2 - 4\lambda x + 4}$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Γραφική παράσταση

5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } 0\le x\le 3 \\ 1, & \text{αν } -1<x<0 \\ x-2, & \text{αν } -3\le x\le -1 \end{cases}.$$

6. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\sqrt{-x}$ **β)** $g(x)=\sqrt{|x|}$ **γ)** $h(x)=\sqrt{|x-1|}+2$

Σημεία τομής με τους άξονες ,σχετική θέση με τον χ΄χ

7. Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων με τους άξονες για τις συναρτήσεις

α) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ **β)** $f(\mathrm{x})=\sqrt{\mathrm{x}^2+9}-\sqrt{6\mathrm{x}}$

γ) $f(x)=3^x+3^{x-1}-3\cdot 2^x$ **δ)** $f(x)=1-2\sigma\upsilon\nu x$

8. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι τέτοιες ώστε $g(x)=f^2(x)-2f(x)+x^2+3$ για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$f^3(x)-2f^2(x)+5f(x)=-e^{2x}-e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

10. Έστω η συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\mathrm{f}^2(\mathrm{x})+\mathrm{f}(\mathrm{x})-2=\mathrm{x}^2+\mathrm{x}$ για κάθε $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $\mathrm{C_f}$ δεν τέμνει τον x΄x.

11. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2f^2(x)-3f(x)+1}{x^2-3x+4}$ για κάθε $\mathrm{x}\in\mathrm{R}$. Να δείξετε ότι η $\mathrm{C_g}$ είναι πάνω από τον άξονα χ'χ .

Σημεία τομής ,σχετική θέση γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

12. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+2x-4$, βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2+x+2$.

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(x)=\ell n(x-2)+\ell n(x+2)$ καθώς επίσης και τα x ∈ A για τα οποία η καμπύλη y=f(x) βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=\ln 5$.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f(x)+1=g(x)+e^x,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,g.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+4x^2+4x+1, g(x)=2x^2+5x+3.$

α) Να βρείτε διαστήματα στα οποία η C_f είναι «πάνω» από τη C_g;

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g και να αποδείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου με εμβαδόν Ε = 6τ.μ.

16. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^2-\beta x+1$ και $g(x)=x^2-2\alpha x-\beta$. Αν η κατακόρυφη απόσταση των C_f και C_g στα σημεία τους με τετμημένη 1 είναι 3 και οι C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: 2x+1=0$ να βρείτε τα α και β.

17. Αν $x\in(0,\pi)$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2\eta\mu x-1$ **β)** $f(x)=\sqrt{2}\eta\mu x-1$ **γ)** $f(x)=2\eta\mu x-\sqrt{3}$

δ) $f(x)=3\eta\mu x-5$ **ε)** $f(x)=4-\eta\mu^2 x$ **στ)** $f(x)=2\eta\mu x+1$

18. Αν $x\in(0,\pi)$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$ **β)** $f(x)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x-1$ **γ)** $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}$

δ) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+1$ **ε)** $f(x)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+1$ **στ)** $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+3$

19. Αν $x\in(0,\pi)$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$ **β)** $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

γ) $f(x)=\eta\mu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ **δ)** $f(x)=3\eta\mu x+\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

20. Αν $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\varepsilon\varphi x-1$ **β)** $f(x)=\varepsilon\varphi x+1$

Ισότητα Συναρτήσεων

21. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ισχύει f (x) = g(x).

α) $f(x)=\dfrac{e^{3x}-2xe^{x}}{xe^{x}}$ και $g(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}-2$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2|x|}$ και $g(x)=1+\dfrac{2}{|x|}$

γ) $f(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}$ και $g(x)=\sqrt{x}-3$

δ) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$

22. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι ίσες οι παρακάτω συναρτήσεις.

α) $f(x)=\ln(x+2)+\ln(2-x)$ και $g(x)=\ln(4-x^2)$

β) $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ και $g(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

γ) $f(x)=2\ln(x-3)$ και $g(x)=\ln(x-3)^2$

23. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{x-\alpha+2}$ και $g(x)=\dfrac{x^2-(\alpha+\beta-1)x+2\alpha-7}{x+\beta-1}$ να είναι ίσες.

Πράξεις συναρτήσεων

24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις : $f+g$ $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{6-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g, f-g, f\cdot g, \dfrac{f}{g}, \dfrac{g}{f}$.

26. Έστω $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[0,2]\\ -x, & x\in(2,4]\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x+2, x\in[-1,1]\\ 2x-4, x\in(1,3]\end{cases}$.

Να οριστούν οι συναρτήσεις : **α)** $f+g$ **β)** $f\cdot g$

27. Έστω $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-2,0]\\ 2, & x\in(0,2]\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}0, x\in[-3,-1]\\ 3, x\in(-1,1]\end{cases}$.

Να οριστούν οι συναρτήσεις : **α)** $f+g$ **β)** $f\cdot g$

28. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)\cdot\left[f(x)+g(x)-4\right]\le g(x)\left[f(x)-g(x)+4\right]-8$ για κάθε $x\in A$. Να αποδειχθεί ότι: $f=g$.

29. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\forall x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $4x^2+3f^2(\mathrm{x})-2f(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x})+\mathrm{g}^2(\mathrm{x})=4\mathrm{x}\,f(\mathrm{x})+f^2(x)$ να αποδειχθεί ότι $f=g$.

30. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2+1$ και $(\mathrm{f}-\mathrm{g})(\mathrm{x})=3\mathrm{x}^2-1$.

Αν $\mathrm{h}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2$,να δείξετε ότι : $\mathrm{f}(\mathrm{x})=2\mathrm{h}(\mathrm{x})$ και $\mathrm{g}(\mathrm{x})=-\mathrm{h}(\mathrm{x})+1$.

Σύνθεση συναρτήσεων

31. Να βρεθεί η σύνθεση fog , gof των συναρτήσεων :

α) $f(\mathrm{x})=\mathrm{x}+3, x\in[0,2]$, $\mathrm{g}(\mathrm{x})=-\mathrm{x}+2$ $[-2,2]$

β) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$, $g(x)=x$

γ) $f(x)=\eta\mu x$, $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\sqrt{9-\mathrm{x}^2}$

δ) $f(x)=\begin{cases}x-2, x\ge 1\\ -x, x<1\end{cases}$, $\mathrm{g}(\mathrm{x})=4\mathrm{x}+2$

ε) $f(x)=\sqrt{-x+2}$, $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\sqrt{\mathrm{x}^2-1}$

32. Αν $f(x)=\dfrac{x-3}{x}$ να υπολογισθεί η fof.

33. Έστω $f(x)=\begin{cases}x^2+3, & -1\le x\le 1\\ 3x+1, & 1<x\le 10\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-2, & 0\le x\le 4\\ x+3, & 4<x\le 7\end{cases}$.Να βρείτε τη συνάρτηση fog.

Αποσύνθεση συναρτήσεων

34. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει:

α) $(f\circ g)(x) = x^2-4x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x+4$

β) $(f\circ g)(x) = \sqrt{1+x^5}$, για κάθε $x\geq -1$ και $g(x)=-x^5$

γ) $(fog)(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, για κάθε $x>-1$ και $g(x) = \ell n(x+1)$

35. Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

α) $(f\circ g)(x)=x^2+x$ και $f(x)=x-1$

β) $(f\circ g)(x)=e^x+x\sigma\upsilon\nu x$ και $f(x)=x+1$

γ) $(f\circ g)(x)=2x+1$ και $f(x)=\ln x,\ x>0$

δ) $(f\circ g)(x)=x+8$ και $f(x)=e^{x+1}$

Πεδίο ορισμού σύνθετων συναρτήσεων

36. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$.Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x^2)$ **β)** $f(x-4)$ **γ)** $f(\ln x)$

37. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[5,8]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x+8)-f(9-x^2)$

38. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) είναι το $[1,4]$,τότε να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $h(x)=f(x-1)+f(x+3)$.

Συναρτησιακές σχέσεις

39. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x+y)=f(x)-f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0$ **β)** f άρτια **γ)** $f(x-y)=f(x)-f(y),\ x,y\in\mathbb{R}$

δ) η f είναι σταθερή συνάρτηση

40. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, για την οποία ισχύει:
$f(xy)=f(x)f(y)+xy-1$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=1$ **β)** $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)},\ x\in\mathbb{R}^*$ **γ)** $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{x}{y}-1,\ x,y\in\mathbb{R}^*$

41. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $2f(x)+f(3-x)=2x, x\in\mathbb{R}$ **β)** $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$.

42. Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $2f(x)+4f(-x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$ **β)** $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x}+2x,\ x\in\mathbb{R}^*$.

43. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x+1)\le e^x\le ef(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f **β)** Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

44. Δίνεται περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $x^2f(x)\ge x^4\eta\mu x+x,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

45. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι

$f\left(\frac{x}{e}\right)\le\ln x\le f(x)-1$ για κάθε $x>0$.

α) Να βρείτε την f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

46. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x-1$ και $g(x)=x+1$. Να βρείτε τη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:
$(h\circ f)(x)+3\le(f+g)(x)\le(h\circ g)(x)-1$.

Μονοτονία Συναρτήσεων

Μονοτονία συνάρτησης με γνωστό τύπο

47. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x)=2-\ln x$ **β)** $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}$ **γ)** $f(x)=e^{2x}+e^x-1$

δ) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ **ε)** $f(x)=x^2-2x$ **στ)** $f(x)=x^2-6x+8$

ζ) $f(x)=\frac{x-3}{x-2}$ **η)** $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

48. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$.

α) $f(x)=\begin{cases}-x^2+3x, & x<0\\ 2^x+x^2, & x\geq 0\end{cases}$ **β)** $f(x)=\begin{cases}x^2+3\,,\,x>0\\ e^x+1\,,\,x\leq 0\end{cases}$

Θεωρητικές

49. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση gof είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων fof και gog.

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης

i) $f(x)=e^{e^x}$

ii) $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

50. Έστω f γνησίως αύξουσα συνάρτηση .Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα

β) Η συνάρτηση kf είναι γνησίως αύξουσα αν $k>0$ και γνησίως φθίνουσα αν $k<0$.

γ) Η συνάρτηση $f+k$ είναι γνησίως αύξουσα ,όπου $k\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $f(x)>0$ τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως αύξουσα

51. Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f},\mathrm{g}:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $\mathrm{h}=\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{g}}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{f}(2\mathrm{x}^2)\cdot\mathrm{g}(5\mathrm{x})-\mathrm{f}(5\mathrm{x})\cdot\mathrm{g}(2\mathrm{x}^2)>0$.

52. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}|x_1-x_2|$ για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$. Να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{x}{2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{x}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

53. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει : $f(x)e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

54. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση f για την οποία να ισχύει ότι: $e^{f(x)}+2x=x^2$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

55. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία να ισχύει ότι: $\ln f(x)=x^2-4x+1$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$.

Απόδειξη ανισοτήτων με μονοτονία

56. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-e^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi)$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ με $\alpha<\beta$ ισχύει ότι: $\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta>e^{\alpha}-e^{\beta}$.

57. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε x>3 ισχύει ότι: $e^3-e^x<\ln\frac{x}{3}$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\alpha^x$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(-1,0)$ ισχύει $\alpha^x-\alpha^{x^3}>x-x^3$

Λύση ανισώσεων με μονοτονία

59. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3)<f(3x-2)$

60. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+2f(x)=x^3-2x^2+5x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3-1)>f(x-1)$.

61. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+3f(x)=x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$ και $f(-3)=0$.

γ) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

i. $f\left(f\left(x^2-2\right)\right)>f\left(f(x)\right)$ **ii.** $f(x)>0$

iii. $f(x)<1$ **iv.** $f\left(f\left(x^2\right)-4\right)<0$

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f(x)\right)>7$.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln x$, x >0 και $\alpha\in(0,1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

β) Να λύσετε την ανίσωση : $\alpha^{x^2+x+4}-\alpha^{x^2+9}<\ln(x^2+x+4)-\ln(x^2+9)$

64. Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να λύσετε την ανίσωση $(fof)\left(x^2+x\right)<(fof)(x+1)$

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-2+\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$.

66. Δίνεται η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο R και για την οποία ισχύει $f(x)+f(y)=f(xy)$ για κάθε x,y∈R. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x-4)-f(x+2)>f(6x+4)-f(2x-1)$.

67. Η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3-x)+f(x+7)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα να λύσετε

α) την εξίσωση f(x)=0 **β)** την ανίσωση $f(x^2-3)<0$

Ακρότατα

68. Να βρείτε το ακρότατο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2-2x+3$ **β)** $f(x)=-x^2+4x-5$

γ) $f(x)=x^6-4x^3+3$ **δ)** $f(x)=e^{2x}-2e^x+2$

69. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $-x_0$.

70. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο μόνο στο 2 το 3 και ισχύει $f(\alpha)+2f(\beta)=9$ να βρείτε τα α και β.

71. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$f(x)=3+(g(x)-2x)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία $y=2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

72. Να βρεθεί σημείο της ευθείας $\varepsilon: y=x+2$ του οποίου το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τους άξονες είναι ελάχιστο.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\lambda x+2$, $\lambda,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το λ, ώστε η f να έχει ελάχιστο το -2.

Συναρτήσεις1-1

1 - 1 Συνάρτηση με γνωστό τύπο

74. Να εξετάσετε αν είναι 1-1 οι παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ **β)** $f(x)=\sqrt{x-2}$ **γ)** $f(x)=3x^3+2x+1$

δ) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ **ε)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ **στ)** $f(x)=e^{-2x}-x$

ζ) $f(x)=e^{-\frac{3}{x}}$ **η)** $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-2}$

75. Να εξετάσετε αν είναι 1-1 οι παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x)=\sqrt{x+1}$ **β)** $f(x)=2x^3+3x+2$ **γ)** $f(x)=e^{-x}-2x$

δ) $f(x)=x^4+5$ **ε)** $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+2}$

1-1 και σύνθετη συνάρτηση

76. **α)** Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις '1-1' , να δειχθεί ότι και η $g\circ f$ είναι 1-1.

β) Αν η f είναι '1-1' τότε και η $\varphi(x)=[f(x)]^3+2f(x)-3$ είναι '1-1'.

77. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(f\circ f\circ f)(x)-f(f(x))=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

78. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+4f(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι 1-1 , β) η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

1 - 1 και λύση εξίσωσης

79. Αν f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(f(x))+f^3(x)=2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι '1-1' **β)** Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3+x)=f(4-x)$

80. Δίνεται η συνάρτηση f : R → R για την οποία ισχύει f (f (x)) = f (x) + e^x -1 για κάθε x∈ R.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3-5x)=f(2x-6)$.

81. Δίνεται η συνάρτηση f : R → R η οποία είναι 1-1 και για την οποία ισχύει $f(f(x))=f(lnx)+lnx$ για κάθε $x>0$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο $A(1,0)$.

β) Να βρεθεί η ακέραια ρίζα της εξίσωσης $f(x^3-2x)=0$.

82. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f : R → R της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1,1) και B(2,4).

α) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $f\left(x^2-2\right)=4$ **ii)** $f^3(x)=1$

β) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $f(x^2-3)<1$ **ii)** $f(x-11)<4$

Αντίστροφη συνάρτηση

Εύρεση αντίστροφης

83. Να βρείτε τις αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = -1 + 2\sqrt{3-x}$ **β)** $f(x) = \frac{3-x}{3+x}$

γ) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ **δ)** $f(x) = ln(1-x)$

84. Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της.

α) $f(x) = x^3 - 2$ **β)** $f(x) = e^{x+1} - 4$ **γ)** $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

δ) $h(x) = x^2 - 10x + 9, x > 6$ **ε)** $a(x) = \frac{3x-3}{3x+5}$

85. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x-5, x \geq 6 \\ 2x+1, x < 6 \end{cases}$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

β) Αν υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f τότε να τη σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα και να βρείτε τον τύπο της.

86. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 4x+1, \alpha\nu \ x \geq 3 \\ x+10, \alpha\nu \ x < 3 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1

β) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να σχεδιάσετε στους ίδιου άξονες τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

87. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $2f^3(x) - 5f(x) + x = 0$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

α) η f αντιστρέφεται

β) να βρείτε την f^{-1} αν γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

88. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) - f(x) = x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται **β)** Να εκφράσετε την f^{-1} σαν συνάρτηση της f.

89. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:
$(f\circ f)(x)=4x-15$ και $(f\circ f\circ f)(x)=8x-35$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. **β)** Να βρείτε τον τύπο της f.

Θεωρητικές

90. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)=f(x)+x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: **α)** η f αντιστρέφεται, **β)** η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

91. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(f\circ f)(x)=f(x)-2x$, $x\in\mathbb{R}$ να δείξετε ότι :
α) η f αντιστρέφεται **β)** η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)=3-2e^{x-1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται **β)** Η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$
γ) Η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Εξισώσεις-Ανισώσεις-Απόδειξη ανισοτήτων

93. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $\ln x=1-x$ **β)** $e^{2x}+2x=2-e^{x}$ **γ)** $x^7+2x^9-3=0$
δ) $\left(x^3+x\right)^{11}-3(x+1)^5=(x+1)^{11}-3\left(x^3+x\right)^5$
ε) $\ln\dfrac{e^x+1}{e^{-x}+1}=7\left(e^{-x}+1\right)^3-7\left(e^x+1\right)^3$

94. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)-2x=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1,-1)$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$.

95. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f\left(f(x)\right)+f^3(x)=2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη,
β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2x^3+x\right)=f(4-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

96. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

- $e^{f(x)}+f(x)=x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f\left(\frac{e}{x}\right)$

γ) Να βρείτε την f^{-1}

δ) Να λύσετε την ανίσωση $(x^3-8)(e^x-3)<f(-1)$.

97. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ και $g(x)=1-\ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1} .

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $(f^{-1}og)(x)$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

γ) Αν $1<\alpha<\beta<e$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1-\ln\alpha}{1-\ln\beta}>\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$.

98. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη που η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,4)$ και $B(6,-2)$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(-3+f^{-1}(x^2-3x))=4$

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x-5)<3$

99. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathrm{R}\to R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(-1,5) και B(2,4)

α) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(x^2)-3)=5$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(e^x+3)-3)>5$

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{-2x}-3x-2e^2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x-2e^2)-1)=3$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x)-1-2e^2)<0$.

101. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^5+2x^3-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)\right)=4$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(f\left(x^2+2x+2\right)-5\right)>0$

102. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(fof)(x)=x^5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η f αντιστρέφεται **ii.** $f\left(x^5\right)=\left(f(x)\right)^5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$.

ii. Να αποδείξετε ότι: $f^5(-1)+f^5(1)=f(0)$

iii. Αν $f(32)=243$,να υπολογίσετε το $f(2)$.

103. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει:
$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0$, **β)** f περιττή,

γ) αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι «1-1»,

δ) $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

104. Θεωρούμε συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=1$, **β)** $f\left(\frac{1}{\kappa}\right)=-f(\kappa)$ για κάθε $\kappa\in(0,+\infty)$,

γ) Αν το 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ να δείξετε ότι η f είναι «1-1»,

δ) Αν υπάρχει η συνάρτηση $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ τότε
$f^{-1}(\alpha)\cdot f^{-1}(\beta)=f^{-1}(\alpha+\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Σημεία τομής C_f και $C_{f^{-1}}$ όταν f γνησίως αύξουσα

105. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-1}+x-2$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2-3x+3)<1$.

106. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x+x-4$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x))=f(2^x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x-2)<3$.

δ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

107. Έστω $f(x)=x^{31}+4x+4$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το $f^{-1}\left(9\right)$

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^x+x-9,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $f^{-1}(-5)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(\ln x)-3)>0$.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^5+x-128,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τα $f^{-1}(-128),\ f^{-1}(2)$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$.

110. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f^3(x)+3f(x)=x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $\mathrm{f}\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.

Όρια Συναρτήσεων

Ισχυρισμοί

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (a, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x)>0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)<g(x)$ σε μια περιοχή του x_0 τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν $g(x)\le f(x)\le h(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=k\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell\neq k\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)$.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

9. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

10. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm1$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

11. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε και

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

12. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=0$ τότε και

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

13. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχει το όριο στο μηδέν της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in\mathbb{N}$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

14. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Πεπερασμένα όρια $\left(\frac{0}{0}\right)$

Ρητές Συναρτήσεις

111. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-5x+4}$ **β)** $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4}{x^2-2}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-1}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{x^3-\lambda^3}{x^2-\lambda^2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

112. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\nu-1}{x^2-1}, \nu\in\mathrm{N}^*$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^2-3x-2}{x^4-5x^3-14x^2+80}$

113. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f^3(x)-3f^2(x)+3f(x)=x+9$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^{-1}(x)}{x^2-5x+6}$.

Άρρητες συναρτήσεις

114. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}$

δ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{3}}{x-5}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3\sqrt{x}-10}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt{x+4}+1}{x^2-8x+15}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^2-1}$ **θ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-2}{x-1}$

ι) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x\sqrt{x}+x-6\sqrt{x}}$ **κ)** $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+2-\sqrt{9x}}}$

Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου

115. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν $f(x)=\begin{cases} x^2+x-1, & x\le 1 \\ 2x-1, & x>1 \end{cases}$

β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x+1}-2}{x}, & -1<x<0 \\ 6x+1, & x\ge 0 \end{cases}$

116. Αν $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-5x-2}{|x|-2}, x\neq 0 \\ 3 \quad , x=0 \end{cases}$, να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

117. Δίνεται η συνάρτηση : $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{x}-1}{\sqrt{\mathrm{x}+3}-2}, & \text{αν } x>1 \\ \dfrac{3\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}^2-\mathrm{x}}, & \text{αν } 0<x<1 \end{cases}$.

Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\frac{1}{2}} \mathrm{f}(\mathrm{x})$, **β)** $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 6} \mathrm{f}(\mathrm{x})$, **γ)** $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 1} \mathrm{f}(\mathrm{x})$.

118. Αν $f(x)=\begin{cases} x^4-3x \, , x\le -1 \\ -x+3 \ , -1\le x\le 1 \\ x^2-2 \ , x>1 \end{cases}$, να βρείτε εφόσον υπάρχουν τα όρια της f στα $\mathrm{x}_1=1$, $\mathrm{x}_2=-3$ και $\mathrm{x}_3=-1$.

Συναρτήσεις με απόλυτα

119. Να υπολογιστεί τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x^2-x|-6}{|x-4|-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-2|-1}{|x|-1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x+1|+|x^2-4|-9}{x-3}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2+4|x|}{x^2+2|x|}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x+1|+|x+2|-1}{x^2+x}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x^2-x-2|-|2-x|}{|4-x^2|}$

ζ) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}$

120. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-3x+4|-2}{x-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^3-4x-1|-2}{|x^3+6x+2|-5}$

Εύρεση παραμέτρων

121. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} ax^2+\beta x+1, \alpha\nu\ x\le 1 \\ 2ax+\beta, \alpha\nu\ 1<x\le 2 \\ 2a, \quad \alpha\nu\ x>2 \end{cases}$.

Να προσδιορίσετε τις σταθερές α,β ∈ R ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

122. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} 2x^2-x+1, & x<1 \\ \alpha x+\beta, & x\ge 1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} -x+6\ , & x\le 2 \\ \alpha x-\beta\ , & x>2 \end{cases}$.

Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

123. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει ότι $9\alpha+3\beta+\gamma=0$:

α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x-3}=6\alpha+\beta$.

β) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α,β,γ με δεδομένο ότι το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x-3}$ διαιρούμενο με το 6 δίνει υπόλοιπο 1 και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^2-\alpha\cdot\beta}{x-1}=4$.

124. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta, & \alpha\nu\ x\le 4 \\ \dfrac{64\left(\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16}, & \alpha\nu\ x>4 \end{cases}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$ και η f έχει όριο στο $x_0=4$ να προσδιορίσετε τους α, β ∈ ℝ .

Κριτήριο παρεμβολής

125. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}\le f(x)\le\dfrac{4-x}{x^2-12x+32}$ για κάθε $x\in(3,4)\cup(4,5)$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

126. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^4-x^8\le g(x)\le x^4+x^8$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$.

127. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\left|(x-1)f(x)-x^3+1\right|\le(x-1)^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

128. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2\sqrt{2x}\le f(x)\le x+2$ για κάθε $x>0$.Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+5}-3}{x^2-4}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)-3|-1}{x^2-5x+6}$

129. Αν $x^2+4x\le f(x)\le 3x^2+2$ για κάθε $x>-3$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f(x)-1|-4}{\sqrt{x+3}-2}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)+4}-3}{\sqrt{2f(x)-6}-2}$

130. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=0$. Να αποδείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

131. Έστω συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}(x)=\ell\in\mathbb{R}$ και $x\cdot\mathrm{f}(x)-\eta\mu x<0, x\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε το ℓ.

132. Έστω συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\mathrm{f}(x)=\alpha\in\mathbb{R}$ και $(x-2)\cdot\mathrm{f}(x)<x^2-5x+6, x\ne 2$. Να βρείτε το α.

133. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2x\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

134. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)-4f(x)\le x^2-4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

135. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2}\left[4f(x)-f^2(x)\right]=4$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

136. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f^2(x)+g^2(x)\right]=0$. Να αποδείξετε ότι και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

137. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει ότι $\eta\mu^2 x-3x^2+f^2(x)=xf(x)$ για κάθε $x>0$. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, να το υπολογίσετε.

Τριγωνομετρικά όρια

138. Να βρείτε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^3 x}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x-2\eta\mu x}{x^2}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot\varepsilon\phi x}{x^2}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu x-x^2-x}{x^3+x}$

139. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\eta\mu x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\phi x}{x}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\eta\mu x}-1}{x}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sqrt{2x-1}-1}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\eta\mu x}{x^2-2x}$

140. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\sigma\upsilon\nu x-4x+3\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\eta\mu x}{3x+\eta\mu x}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{\varepsilon\phi x}$

Βοηθητική συνάρτηση

141. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5x}{x^2-5x+6}=3$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=10$.

142. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-x^2}{x+\eta\mu 2x}=2$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

143. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x}{x-1}=3$.

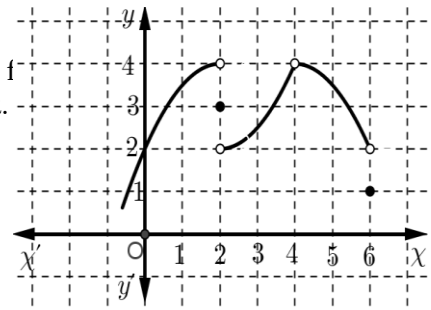
Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)f(x)-2}{x-1}$.

144. Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις :

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x^2-3x+2} = 3$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)(x^2-4)\right] = 1$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)g(x)\right]$.

Όρια και γραφικές παραστάσεις

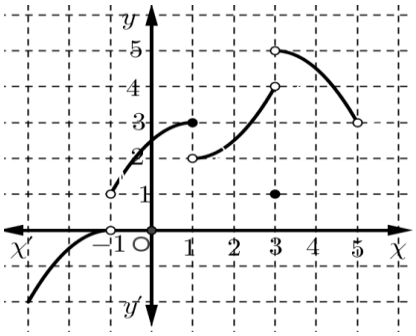
145. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

146. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



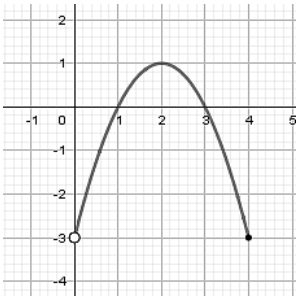
α) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ζ) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$

147. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f^2(x)-1}{f^2(x)-4f(x)+3}$

β) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{|f(x)|}{f^3(x)+|f(x)|}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{f(x)+64}-8}{\sqrt[3]{f(x)+64}-\sqrt[6]{f(x)+64}-2}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{5f(x)+3}-\sqrt{f(x)}-1}{f(x)-1}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\eta\mu\left(f(x)\right)\cdot\eta\mu\left(2f(x)\right)\cdot\eta\mu\left(3f(x)\right)}{f^3(x)}$

στ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f\left(2x^2-1\right)}{x^2-x}$, αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 2$.

Αλλαγή μεταβλητής

148. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x^2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{x^3}$

δ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x^2-7x+12}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 5x}{x+\eta\mu 2x}$ **.**

149. α) Αν $\lim\limits_{x\to 12} f(x)=3$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(5x+2)$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2016$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}$.

150. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)+f(x+2)=2x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to -2}\left(f(x)+4x-2\right)=2$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

151. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(4x)-f(-x)\eta\mu 3x}{4x^2-\eta\mu^2 x}$.

152. Αν για x ∈ R ισχύει $f(5-2x)=f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2016$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

153. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)=f(2-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)-x^2+x\right]=2$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

154. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x^2+3x)}{2x^2-3x}$.

155. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{f(x)}=4$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(27x)}{f(x)}$.

156. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν η f είναι άρτια και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$.

Μη πεπερασμένα όρια $\left(\frac{k}{0}\right)$

157. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-7}{|x-3|}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-3|+4}{x^2-4x+4}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-3|-2}{|x+1|}$

ε) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+1}{x^2-25}$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+5}{x^2-4}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x}{x-2}$

θ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$ **ι)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-7}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$ **κ)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-7x+12}\right)$

λ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(3x)}{x|x|}$ **μ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\pi}{\eta\mu x}$ **ν)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

Παραμετρικά όρια

158. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+\lambda}{|x-1|}$ **β)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-\lambda}{(x+2)^2}$.

159. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x^2-1}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

160. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-\alpha x-\beta}{|x+2|}$ είναι πραγματικός αριθμός , να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

161. Αν $f(x)=\dfrac{\alpha x^3-\beta x^2+2x-8}{x^2-4}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

Βοηθητική συνάρτηση

162. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\,f(x)=-4$.

Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f^2(x)-5f(x)+7}{f^2(x)+2}$

163. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\left[4f(x)-3xg(x)\right]=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left[-2xf(x)-3g(x)\right]=+\infty$ να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$.

164. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν η f είναι άρτια και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

165. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\left(x^2-2\right)\right] = -\infty$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

γ) Αν $g(x) > f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

166. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$8f(x+y) = f(2x) + f(2y) + 24xy(x+y)$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

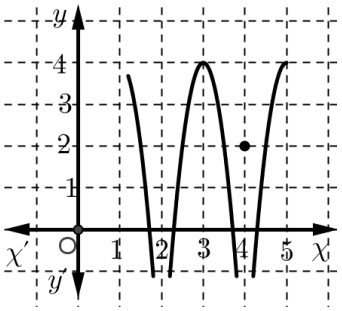
β) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια: i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f^2(x)}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f\left(x^3\right)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x+1)+\sqrt{f^{-1}(x+1)-2}}{x}.$$

Όρια και γραφικές παραστάσεις

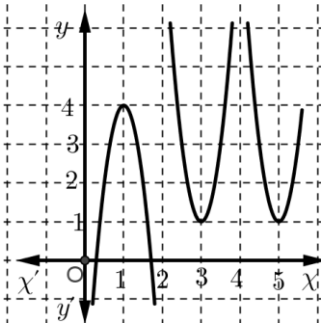
167. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

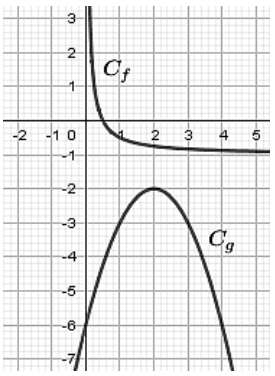
168. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

169. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g.Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|g(x)+6|}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)g(x)\right]$

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)+5}{f(x)}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(g(x)+6)\cdot \eta\mu f(x)\right]$

ε) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x-2)}{g(x)+2}$

Μηδενική επί φραγμένη

170. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{5}{x}\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x^2-3x)\,\eta\mu\dfrac{2x+5}{x-3}\right]$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{3}{x}\right]$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x^2+x}-2x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{3}{x}\right)$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{x+2}{x}+x^{1821}\right)$ **στ)** $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\eta\mu\dfrac{2}{x^2-1}+x^{200}-1\right]$

Όριο στο άπειρο

Όριο πολυωνυμικής-ρητής συνάρτησης

171. Να βρείτε τα όρια.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^3+3x-2)$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+3x-1)$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4\ell n2-5x+1)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^7\sigma\upsilon\nu 2-x-2)$

172. Να βρείτε τα όρια.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-x+1}{x^3+2x+1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{5x^3+x+1}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-x+1}{x^3+x+1}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3x-1}{x^2-3x+2}\right)$

Όριο συναρτήσεων πολλαπλού τύπου

173. Να υπολογίσετε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

α) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x, & \text{αν } x<1 \\ \dfrac{7}{x}, & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$ **β)** $g(x)=\begin{cases} \dfrac{4x^3+1}{2x^3+3}, & \text{αν } x>-5 \\ \dfrac{4x}{8x^3+1}, & \text{αν } x\leq -5 \end{cases}$

174. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}, & x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \\ 3, & -2\leq x\leq 2 \end{cases}$.

Να βρείτε :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Όριο άρρητων συναρτήσεων

175. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x+3\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{25x^2+x+1}+5x\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{9x^2+1}\right)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)$

176. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}+x-1}{\sqrt{9x^2-2}+2x-4}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+4}}$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)$ **στ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+x+1}-x\right)$

177. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5x+10}\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{9x^2+2x}-4x+1\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{25x^2+x+1}\right)$

Όρια με απόλυτα

178. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-3x|+x-1}{x^2+x+1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-2x|+3}{|x-1|-2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^3-2x+3|+x-1}{x^4+2x+2}$

Όρια και παράμετροι

179. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-\mu)x^3+x^2+3}{\mu x^2-3x+5}$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2\mu+3)x^3-3x+1}{(\mu-2)x^2+2}$

180. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2-3x+4\lambda\right]$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(\lambda^2-9)x^3-4x^2-\lambda x+1\right]$.

181. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x-5}+\alpha x+\beta\right)=-5$.

182. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+6x^2+5}+\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=1$.

183. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\beta>0$ ώστε να ισχύει

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha\sqrt{x^2+3}-\sqrt{\beta x^2-12x+5}\right)=3$.

Τριγωνομετρικά όρια

184. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\eta\mu x\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sigma\upsilon\nu x\right)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x+2}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\dfrac{x-4}{x^2+2}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+1}$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\eta\mu x\right)$ **η)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{x^2+2}$ **θ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(2-\eta\mu x\right)}{x+1}$

ι) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{4x}-\sigma\upsilon\nu x\right)$ **κ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}$ **λ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x^2}$

μ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\eta\mu\dfrac{1}{x}$ **ν)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\eta\mu\dfrac{1}{x}$ **ξ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x^2+2}+x}$

185. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x\eta\mu x+2}{x\sqrt{x^2-9}}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-10x\eta\mu x-5\sigma\upsilon\nu 2x}{x^4+\sqrt{x}}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\eta\mu x\right)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)\eta\mu 2x}{x^4+3x^2+2}$

ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{x^3-3x+4}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu x}{4x+\eta\mu x}$

Όριο εκθετικών –λογαριθμικών συναρτήσεων

186. Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-4\cdot3^x+3}{3^{2x}+2\cdot3^x-3}$ **β)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{2x+1}-2^x-1}{3\cdot4^x-2^{x+2}+1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^{x+3}}$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^{x+1}-6\cdot2^x}{e^x-2^{x+1}}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^x-2^{x+1}}{3\cdot5^{x+1}+2^x}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+2}-2^{x+1}+3}{e^x+2^{x+2}}$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x-3^{x+1}+2}{4^{x+2}-5\cdot3^x+1}$

187. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda^{x+3}-3^x+5}{\lambda^x+3^x-8}$, $\lambda>0$. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=64$.

Όριο σύνθετης συνάρτησης στο άπειρο

188. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

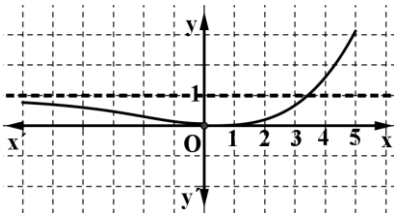
α) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{2x^2-3}{1-x}}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x+1}{x^2-5x}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2-x+1}{x-2}}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\sqrt{x^2+3}+x}$

ε) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\ln x+2}{4\ln^3 x+\ln^2 x+1}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\ln\sqrt{x^2+2x+3}\right)$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x+2}+3\right)-x-2\right]$ **η)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\ln(x+1)-\ln(x^2+x+1)\right]$

Όρια και γραφικές παραστάσεις

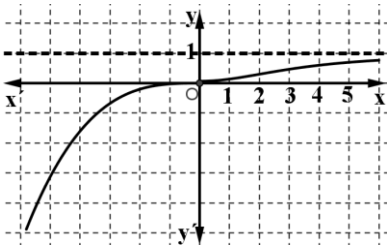
189. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{f(x)}$

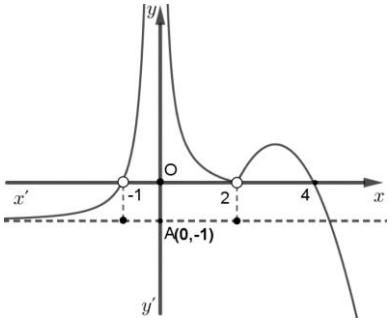
190. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν):



α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{f(x)}$

191. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να υπολογίσετε τα:



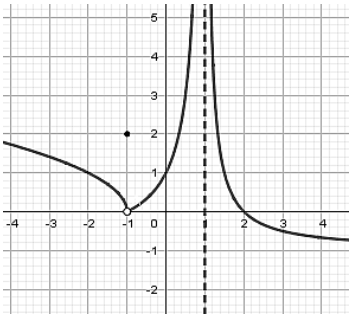
α) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ και $f(-1)$.

β) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ και $f(2)$.

γ) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}$.

192. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{f(x)}$

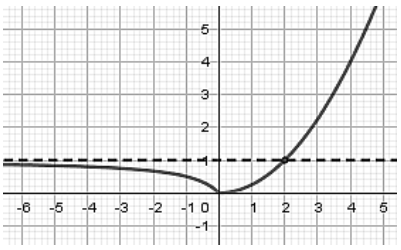
γ) $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{f(x)}{x+2}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)\left(1-\sqrt{x}\right)}{x-1}$

ε) $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

στ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|f^2(x)-3f(x)+1\right|}{\left|1-f^2(x)\right|+5f(x)}$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln|x-2|}{f^2(x)}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-1\right)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]$

θ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-f(-1)}{f(x)-1}$ **ι)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}-1}{f^2(x)-1}$

193. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{f(x)}$

β) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f^2(x)-3f(x)+2}{f^2(x)-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}-f(x)\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left|f(x)-x\right|-x+1}{\sqrt{f(x)}-1}$

ε) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^{-f(-x)}\eta\mu\dfrac{1}{f(x)-1}\right)$ **στ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln\left(e^{f(x)}+1\right)-f(x)\right]$

Διάφορες

194. α) Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $x^3+2x\le f(x)\le 3x^3-2x+2$, να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x), \lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

β) Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|xf(x)-\sqrt{x^2+1}|\le 1$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

γ) i) Αν $\lim\limits_{x\to +\infty}f^2(x)=0$, να δειχθεί $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$

ii) Έστω η συνάρτηση g για την οποία $\lim\limits_{x\to +\infty}[g^2(x)+4g(x)]=-4$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)$

195. α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$ όταν $\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\le f(x)\le\dfrac{2x-1}{x+1}$, x < -1

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ όταν $\sqrt{4x^2+1}-x\le f(x)+x\le\sqrt{x^2+1}$, x > 0

196. Δίνεται άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)+\sqrt{x^2+x+2}-x+1\right]=4$.

Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$.

197. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=6$,να υπολογιστεί το όριο

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-3x^2-6}{2x^2f(x)-6x^3+4x-5}$

198. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\left|(x^2+1)f(x)-x\right|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

199. Να βρείτε πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ για το οποίο να ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{P}(x)}{x^2-1}$ και

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{P}(x)}{x^2-1}=3$.

200. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{2y^2\eta\mu x+xy^2+2x^2y}{xy^2+1}$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2\eta\mu x+x}{x}$, $x>0$ **β)** Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

γ) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{xf(x)-\eta\mu x}$.

201. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1-e^x\right)-\ln\left(1+e^x\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της **β)** Να βρείτε το πρόσημο της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(-4)x^4-3x^3+7x^2-6x+2}{x^3-5x^2+9}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{f^{-1}(x)}-e^{f(x)}\right)$

202. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f^3(x)+3f(x)=x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^{x^2+4x}\right)<3$ **δ)** Να υπολογίσετε το όριο

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)\eta\mu x}{x^4}$.

Συνέχεια συνάρτησης

Ισχυρισμοί

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Α ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Γραφικές παραστάσεις

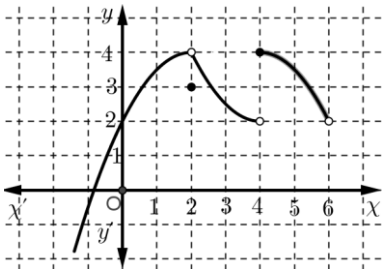
203. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) τις τιμές $f(2), f(4)$

δ) τα σημεία στα οποία αυτή δεν είναι συνεχής.



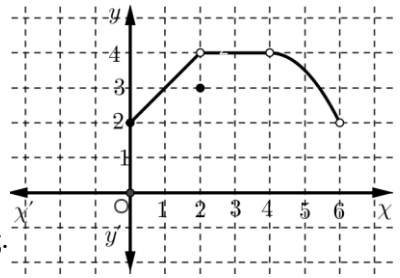
204. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) τις τιμές $f(2), f(0)$

δ) τα σημεία στα οποία αυτή δεν είναι συνεχής.



Συνέχεια της f στο x_0.

205. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια στο $x = x_0$ τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ **(**$x_0 = 0$**)**

β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ **(**$x_0 = 1$**)**

γ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 3x-1 & x > 1 \end{cases}$ **(**$x_0 = 1$**)**

δ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{x}, & x \le 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \dfrac{\eta\mu x}{2x} & , x > 0 \end{cases}$ **(**$x_0 = 0$**)**

Συνέχεια της f στο D_f

206. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-16|}{x-4}, x \ne 4 \\ 8 \quad , x = 4 \end{cases}$

β) $f(x) = \begin{cases} x^{2016}\eta\mu^2\left(\dfrac{e^x}{x^{2016}}\right), x \ne 0 \\ 0 \quad , x = 0 \end{cases}$.

207. Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2,\ \alpha\nu\ \ x\le 0 \\ 5x-4,\ a\nu\ \ 0<x\le 1 \\ 4x^2-3x,\ a\nu\ 1<x<2 \\ 3x+4,\ \alpha\nu\ x\ge 2 \end{cases}.$$

208. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\lambda x-2}$, $x>0$, $\lambda\ge 0$.

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$g(\lambda)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ \lambda>0 \\ 0\qquad\quad ,\lambda=0 \end{cases}.$$

Εύρεση παραμέτρων

209. Να προσδιορίσετε τα α,β,γ ∈ R ώστε η συνάρτηση f με :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1},\alpha\nu\ x<1 \\ \dfrac{x^2-ax+3}{x^2+\beta x-\beta-1},\alpha\nu\ x>1 \\ \gamma,\alpha\nu\ x=1 \end{cases}$$ να είναι συνεχής.

210. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x,\alpha\nu\ x\le 0 \\ a\sigma\upsilon\nu x+\beta,\ \alpha\nu\ 0<x\le\pi \\ \eta\mu x,\ \alpha\nu\ \ x\ge\pi \end{cases}$.

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο R.

211. Να βρεθούν οι τιμές των α , β ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+2\beta x-6}{x-2}\ ,\ x>2 \\ \alpha x+3\beta\qquad ,\ x\le 2 \end{cases}$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Εύρεση τιμής της συνάρτησης μέσω συνέχειας

212. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x}=2$.Να υπολογίσετε το $f(0)$.

213. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει :
$\eta\mu 2x - x^2 \le xf(x) \le \eta\mu 2x + x^2$ να βρείτε το $f(0)$.

214. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει:
$|xf(x) - x\eta\mu x| \le x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $f(0)$.

215. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 2$ με $f(x)(x-2) \ge x^3 - 6x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.Να υπολογίσετε το $f(2)$.

Εύρεση τύπου συνάρτησης μέσω συνέχειας και απόδειξη συνέχειας(μέσω σχέσης)

216. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$ με
$f(x) + f(x-3) = 2x^2 + 6x + 19$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 5$.Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.

217. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύει:
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ και $f(x) = f(x+1),\ x \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε το $f(0)$. **β)** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 1$.

218. Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$g^2(x) \le 6g(x) + 25x^2 - 10x - 8$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ναναποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = \dfrac{1}{5}$.

219. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει
$f^2(x) + 4g^2(x) \le 4f(x)g(x) + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

220. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

221. Δίνεται η f ορισμένη στο R με $f^5(x) + f(x) + 1 = e^x$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

222. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \le 2019|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Συνέχεια και βοηθητική συνάρτηση-αλλαγή μεταβλητής

223. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0=2$, για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+1)}{x-1}=3$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

224. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0=1$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x}=4$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

225. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=6$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)}{x-3}=2$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$.

226. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$ με $f(x)+f(x+1)=4x^2+4x+8$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$. Να αποδείξετε ότι f είναι συνεχής στο $x_1=1$.

227. Αν η f είναι συνεχής στο 2 και f(3)=10 και f(5-x)=f(x) για κάθε x $\in \mathbb{R}$, τότε:
α) Να βρείτε το f(2)
β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0=3

228. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $6x\le f(x)\le x^2+9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε το $f(3)$ **β)** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=3$.
γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1/3}\left(x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

229. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-xf(x)}{\eta\mu x+x}=2$.
Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,-3)$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Θεωρήματα συνέχειας

Θεώρημα Bolzano και ύπαρξη ρίζας

230. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3, & x\le 2\\ 2x-3, & x>2\end{cases}$. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[0,4]$ και να βρείτε $\xi\in(0,4)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$.

231. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+x-2, & -3\le x\le 2\\ x^2-4x-5, & 2<x\le 6\end{cases}$ έχει ρίζες στο διάστημα $(0,6)$ χωρίς να πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano.

Ύπαρξη ρίζας με βοηθητική συνάρτηση

232. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-2,0)$, τέτοιο, ώστε: $\xi^4+3\xi^3+2\xi+5=0$.

233. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x}-e^x+4=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

234. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x-x+2=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ και στη συνέχεια να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.

235. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f^2(x)-g^2(x)=-5x$ και $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε οποιοδήποτε διάστημα (α,β) με $\alpha<0$ και $\beta>0$.

236. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις :
α) $x^4-x^3+2x^2-6x+4=0$ και **β)** $x^6-3x^5+2x^4+x^3-6x^2+11x-6=0$
έχουν τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

237. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x+2\le f(x)<e^{x+2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^3x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

238. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $f\left(x\right)=x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

239. Έστω f συνεχής στο $\left[1,3\right]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=\dfrac{\ln \mathrm{x}-1}{\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+3}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,3).

240. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)=2x^3-x-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

241. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5\left(x\right)+4f^3\left(x\right)+5=x^3+x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,1\right)$.

242. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\mathrm{f}\left(0\right)=-1$ και $\mathrm{f}\left(1\right)=2$.

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)=x^3+1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

243. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2\left(f\left(x\right)\right)+f\left(f^2\left(x\right)\right)=3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f\left(-2\right)=-2$.

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

β) Αν υπάρχει $\xi<0$ τέτοιο, ώστε $f\left(\xi\right)=\xi$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\xi,\xi^2\right)$ τέτοιο, ώστε $f\left(x_0\right)=0$.

244. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[0,2\right]$ με $0<f\left(x\right)<1$ για κάθε $x\in\left[0,2\right]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,2\right)$ τέτοιο, ώστε $f^2(\xi)=f(\xi)-\xi$.

245. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $\left[0,1\right]$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,1\right]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε:

$\left(f\circ g\right)\left(x_0\right)=\left(g\circ f\right)\left(x_0\right)+2{x_0}^2-1$.

246. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ και
- $\beta^2<3\gamma,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

247. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f^3(x)+2\lambda f^2(x)+9f(x)=9x^3-3x^2-3x+\lambda$ και,
- $|\lambda|<3,\lambda\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

Ύπαρξη 2 τουλάχιστον ριζών

248. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5-24x+3=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(0,3)$.

249. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-2,1)$:

α) $x^3+3x^2-1=0$ **β)** $2x^4+x^2-1=0$ **γ)** $x^6-2x^3+5x^2+x-1=0$

250. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ,δ με $\delta>0$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta<0$ και $\alpha+\gamma>0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

251. Δίνεται f : [2,6] → R και συνεχής στο [2,6] . Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-6}=0$, έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο (2,6).

Ύπαρξη μοναδικών ριζών

252. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μοναδική ρίζα στα αντίστοιχα διαστήματα

α) $x^3+2x-4=0$ στο $(1,2)$ **β)** $x^4+2x^3+3x-8=0$ στο $(1,3)$

253. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $-2\ln x+3\sigma\upsilon\nu x=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,\pi)$.

254. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+\alpha x+\beta=0$, όπου $\beta>0$ και $\alpha+\beta+1<0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

Ύπαρξη ρίζας σε κλειστό διάστημα

255. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)+f(1)=0$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]$.

256. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\neq 0$ για την οποία ισχύει: $e^{-\alpha}f(\alpha)+e^{-\beta}f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

257. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\eta\mu x_0)=\eta\mu x_0$.

258. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[1,3]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=f(\xi+2)$.

259. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,2]\to[0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2]$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi)+\xi^2=2f(\xi)+3$.

260. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,2]\to[0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιο, ώστε: $f^2(x_0)-x_0f(x_0)=1-x_0$.

261. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x-\beta^2\eta\mu x=\beta^2$, $\beta\neq 0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει το $2\beta^2$.

Ύπαρξη σημείων τομής γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

262. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)=-1$ και $f(1)=4$.Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την ευθεία y=x.

263. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[0,\ 2]$ και τέτοιες ώστε $f(0)<g(0)$, $f(2)>g(2)$. Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες $y=f(x)$, $y=g(x)$ τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,\ 2)$.

264. Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$, για την οποία ισχύει $3x^2\le f(x)+x\le 3x$ για x ∈ $[0,1]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y=4x-1$ στο $(0,1)$.

Πρόσημο συνάρτησης-Εύρεση τύπου της f

265. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $f(x)=\left(x^2-5x+6\right)g(x)$ για κάθε $x\in[2,3]$. Αν οι αριθμοί 2, 3 είναι διαδοχικές ρίζες της f να αποδείξετε ότι $g(2)g(3)\geq 0$.

266. Δίνεται συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g(\kappa)+g(\lambda)+g(\mu)=0$, $\kappa, \lambda, \mu\in\mathbb{R}$ με $\kappa\neq\lambda\neq\mu$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η g είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}$.

267. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f^2(x)+xf(x)=4$ για κάθε $x\geq 0$ και $f(3)=-4$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{x}{2}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, το οποίο και να βρείτε.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$.

268. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[-1,2]$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-5f^2(x)+f(x)=x^2-7x+12$ για κάθε $x\in[-1,2]$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [-1,2].

269. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+3f(x)\geq x^4+e^x+2$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

270. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $f^2(x)=x^4+2x^2-4f(x)-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε: α) το $f(1)$ β) το τύπο της f.

271. Να βρείτε τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^2(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

272. Να βρείτε τις συναρτήσεις f που είναι ορισμένες και συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x)=x^2+2f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

273. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $x^2+f^2(x)=9$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=-3$.

Ύπαρξη τιμής της f μεταξύ δύο τιμών της. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

274. Αν $f(x)=x^4+3x-4$, να αποδείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 200, όταν $x\in[2,4]$.

275. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}.$$

276. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,8]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,8]$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,8)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=\frac{f(0)+2f(2)+3f(4)+2f(8)}{8}.$$

277. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x)-3f(x)+2=0$.

278. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+2x=x^2+1$.

279. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+4f(x)=x^2+4x$.

280. Έστω συνάρτηση $f:[2,3]\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε: $f(2)=2$, $f(3)=3$ και $f^2(x)-3f(x)=x^2-2x$ για κάθε $x\in[2,3]$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

281. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=3$ και $f(2)=5$. Αν η εξίσωση $f(x)=4$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

Ύπαρξη μέγιστης και ελάχιστης τιμής της f

282. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $x_1, x_2 x_3 \in [\alpha,\beta]$ και κ, λ , μ θετικοί αριθμοί με $\kappa+\lambda+\mu=4$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$,τέτοιο ώστε : $\kappa f(x_1)+\lambda f(x_2)+\mu f(x_3)=4f(\xi)$.

283. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,4]$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(1)+3f(2)+5f(3)+f(4)}{10}$.

284. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $x_1, x_2, ..., x_\nu \in [\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $f(\xi)=\sqrt[\nu]{f(x_1)f(x_2)...f(x_\nu)}$.

Σύνολο τιμών - Ύπαρξη ρίζας της f- Πρόσημο τιμής της f από όριο

285. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x = e^{-2x}$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

286. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-\dfrac{1}{x}=0$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

287. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x - 1821 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

288. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x+\ln(x+1)=1$

289. Έστω συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$. Αν το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(3,5]$, να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

290. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(3)=5$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(4)+3)x^2-3x+1}{x+5}$.

291. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(3)=-5$ και – 1, 4 δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)x^3+2x+5}{x^2+4}$.

Συνδυαστικές

292. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $-2 \le \mathrm{f}(\mathrm{x}) \le 2$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ και $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \left(\mathrm{f}(\mathrm{x}) - 2\mathrm{x}\right)^2 + 5$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathrm{x}_0 \in [-1,1]$ τέτοιο ώστε $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = 2\mathrm{x}_0$.

β) Η συνάρτηση g στο x_0 του ερωτήματος α) παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

293. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^5 + x + 3$ με $x \in [0,2]$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι αδύνατη.

294. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[0,2]$. Αν $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-1}{\eta\mu(x-2)} = 16$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε :

α) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τουλάχιστον σε ένα σημείο την C_g, όπου $g(x) = x^3 - x - 2$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-1}{x^2-5x+6}$.

295. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln x + e^x + x - 1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(\mathrm{x}) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\mathrm{x}) = e$.

δ) Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει:
$e^{\kappa^2+4} - e^{4\kappa} = \ln(4\kappa) - \ln(\kappa^2+4) + 4\kappa - \kappa^2 - 4$.

296. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\dfrac{f^2(x)-4}{e^x+4} = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Αν $\mathrm{f}(0) = -3$, τότε:

i) να βρείτε τον τύπο της f.

ii) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+4^{x+2}}{3^x+4^x}$.

297. Έστω μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}-x+1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

Παράγωγοι

Ισχυρισμοί

1.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

2.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

3.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,τότε και η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία για τα οποία ισχύει $g(x)\geq 0$.

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

4.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν δύο συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in A$, τότε και η $f+g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

5.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

6.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

7.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α που αποτελείται από ένωση διαστημάτων, είναι παραγωγίσιμη στο Α και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Α, τότε η f είναι σταθερή στο Α»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

8.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσες με τη πρώτη τους παράγωγο»

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

9. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

10.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 τότε $f'(x_0)=0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

11.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

12.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης αποτελεί και ολικό μέγιστο της συνάρτησης».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

13.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

14.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και υπάρχει ρίζα ρ της εξίσωσης $g''(x)=0$,τότε το σημείο $A(\rho,f(\rho))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f » .

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

15. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x)<0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

16.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

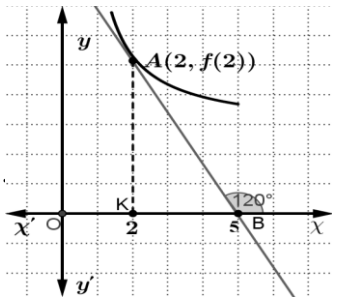
« Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

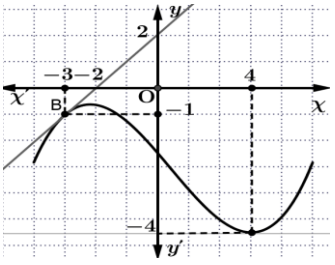
Γραφικές παραστάσεις

298. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f και η εφαπτομένη της ε, στο σημείο $A(2,f(2))$. Η ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 120^o. Να υπολογίσετε τα $f'(2)$ και $f(2)$.

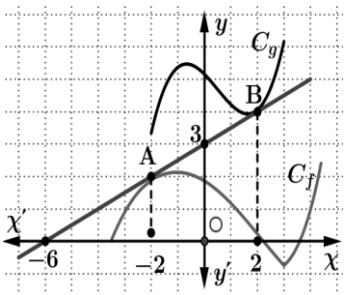


299. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f και ε_1, ε_2 είναι οι εφαπτομένες στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{f(-3)f'(4)+f(4)f'(-3)}{f(-3)-f(4)}.$$



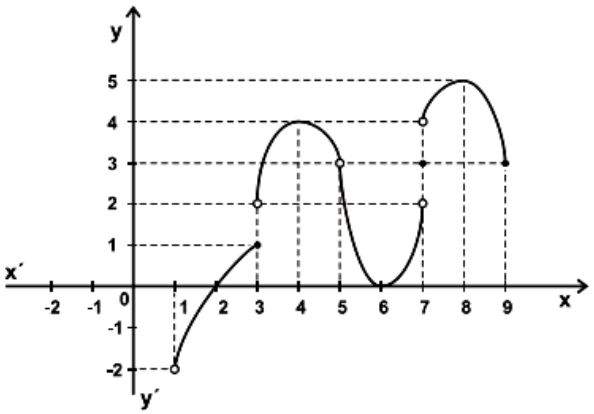
300. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και ευθεία ε, που εφάπτεται της C_f στο $\mathrm{A}\left(-2,\mathrm{f}\left(-2\right)\right)$ και της C_g στο $\mathrm{B}\left(2,\mathrm{g}\left(2\right)\right)$.



α) Να υπολογίσετε τα $\mathrm{f}\left(-2\right),\ \mathrm{g}\left(-2\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι: $8f'\left(-2\right)\mathrm{g}'\left(2\right)=g\left(2\right)-f\left(-2\right)$.

301. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 3} f\left(x\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to 5} f\left(x\right)$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 7} f\left(x\right)$ **v)** $\lim\limits_{x\to 9} f\left(x\right)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f\left(x\right)\right)$

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'\left(x_0\right)=0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Επαναληπτικές 2016

Ορισμός παραγώγου

Εύρεση $f'(x_0)$

302. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο x_0 οι παρακάτω συναρτήσεις :

i) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3x^2+4} & ,x<2\\ \frac{3}{8}x^2+4 & ,x\geq 2\end{cases}$ στο $x_0=2$ **ii)** $f(x)=\begin{cases}2\eta\mu x & ,x\leq 0\\ x^2+2x & ,x>0\end{cases}$ στο $x_0=0$

iii) $f(x)=\begin{cases}3x^3-5x & ,x\leq 1\\ \frac{1}{x+2} & ,x>1\end{cases}$ στο $x_0=1$ **iv)** $f(x)=\begin{cases}3x^2+5, & x\leq 1\\ 6x+2, & x>1\end{cases}$ στο $x_0=1$

303. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$.

α) $f(x)=\begin{cases}x^2-x+\eta\mu x, & x\leq 0\\ \frac{x}{\ln x} & ,0<x<1\end{cases}$ **β)** $f(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

Εύρεση $f'(x_0)$ από ανισοτική σχέση

304. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
$f(x)\leq g(x)\leq f(x)+(x-e)^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=e$ με $f'(e)=3$, να δείξετε ότι $g'(e)=3$.

305. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ για τις οποίες ισχύει:
$f(x)+g(x)\geq \eta\mu x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(0)+g(0)=1$, να αποδείξετε ότι:
$f'(0)+g'(0)=1$.

306. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει:
$|f(x)-3x|\leq \eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=3$. **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(9x)-f(x)}{f(2x)}=4$.

307. Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει

- $f^3(x)-x\cdot f^2(x)+x^2\cdot f(x)\leq x^4+\eta\mu^3 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f(0)\geq 0$

Να υπολογίσετε την $f'(0)$.

Εύρεση $f'(x_0)$ από σχέση ισότητας

308. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $2f^3(x)-2\eta\mu x\cdot f^2(x)+x^2f(x)=2x^3-x\eta\mu^2x$. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

309. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:[0,5]\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $g(x)=2xf(x)$ για κάθε $x\in[0,5]$. Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=2$ και $f'(2)=0$, να αποδείξετε ότι $g'(2)=2f(2)$.

310. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f^3(x)+2f(x)=x^2-3x+2$. Να βρείτε το $f'(1)$.

Εύρεση παραμέτρων

311. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x^2-1, & x\le 1\\ \alpha x+\beta, & x>1\end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

312. Να υπολογίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών λ,μ, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+\mu x, & x\le 1\\ \dfrac{x^2+\lambda x+1}{x+1}, & x>1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

313. Αν $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+3\sqrt{4+x^2}, & x\le 0\\ 2\eta\mu x+\beta, & x>0\end{cases}$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

314. Έστω η συνάρτηση f με f(l) = 1 και f '(l) = 2 και η $g(x)=\begin{cases}f^3(x), x\le 1\\ ax^2+\beta, x>1\end{cases}$.
Να βρείτε τα α, β ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Παράγωγος και συνέχεια

315. Αν f συνεχής στο $x_0=2$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $g(x)=(x^2-3x+2)f(x)$, να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $g'(2)=f(2)$.

316. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, όπου η g είναι συνεχής στο $x_0=\rho$ και ισχύει $f(x)=|x-\rho|\cdot g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\rho$, αν και μόνο αν, το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$

Παράγωγος και όρια

317. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=1$ γα την οποία ισχύει :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)+3}{h}=5$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)+x^2+x+4}{x^2-1}$.

318. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=1$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0$ **β)** $f'(0)=2$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x\eta\mu x-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=4$

Παράγωγος και αλλαγή μεταβλητής

319. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=2$ με $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)}{h}=3$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(2)=0$ **β)** η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

320. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=-3$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-3)}{x}=2016$.Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-3$ και να βρείτε την $f'(-3)$.

321. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h}=0$

β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=0$

γ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x_0+2h)-f^2(x_0+h)}{h}=2f'(x_0)f(x_0)$

δ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{\eta\mu h}=2f'(x_0)$

ε) $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{f(x_0\cdot h)-f(x_0)}{h-1}=x_0f'(x_0)$

στ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(2x)-x_0f(2x_0)}{x-x_0}=f(2x_0)+2x_0f'(x_0)$

η) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu xf(x)-\sigma\upsilon\nu x_0f(x_0)}{x-x_0}=-\eta\mu x_0f(x_0)+\sigma\upsilon\nu x_0f'(x_0)$.

Θεωρητικές

322. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0=4$, με $f'(4)=0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}f(3x+1), & x<1\\ f(6x-2), & x\geq 1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $g'(1)=0$.

323. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 για την οποία ισχύει: $f(0)=f(1)$. Αν $g(x)=\begin{cases}f(2x), & x\leq\dfrac{1}{2}\\ f(2x-1), & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ να αποδείξετε ότι η g είναι αραγωγίσιμη στο $\dfrac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0)=f'(1)$.

Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις

324. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

325. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με $f'(0)=5$ και $f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu y+f(y)\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

326. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y)=f(x)f(y)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=1$

β) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει $f'(0)=1$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παράγωγος συνάρτηση – Κανόνες παραγώγισης

Κανόνες παραγώγισης

327. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων.

α) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x + 1$ **β)** $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - kx + \lambda$

γ) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sigma\upsilon\nu x + e^x + \frac{ln3}{2}$ **δ)** $f(x) = \eta\mu x + 5lnx + \varepsilon\phi x$

ε) $f(t) = 3^t - x^3 + \varepsilon\phi t$ **στ)** $f(\omega) = \eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega + \varepsilon\phi\alpha$

328. Να βρείτε τη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 \ln x$ **β)** $f(x) = x^3 e^x \eta\mu x$ **γ)** $f(x) = t \cdot e^x \cdot \eta\mu x$

δ) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ **ε)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ **στ)** $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

329. Να βρείτε, όπου ορίζονται, την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & ,x \le 0 \\ x^3 + x & ,x > 0 \end{cases}$ **β)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ,x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & ,x > 0 \end{cases}$

γ) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x & , x \le 1 \\ 2x^3 + 3x - 1 & ,x > 1 \end{cases}$ **δ)** $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

330. Να βρείτε, όπου ορίζονται, την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu(3x-1) - 1 & ,x \le 0 \\ \eta\mu^3 x & ,x > 0 \end{cases}$ **β)** $f(x) = \begin{cases} (x^2+1)^3 - 1 & ,x \le 0 \\ x^2 \sigma\upsilon\nu\frac{3}{x} & ,x > 0 \end{cases}$

γ) $f(x) = \begin{cases} 3(x+1)^4 & , x \le -1 \\ 2(x+1)^3 & , x > -1 \end{cases}$ **δ)** $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

331. Να βρείτε τη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x - 3x^2)^4$ **β)** $f(x) = e^{x^3}$ **γ)** $f(x) = -2\ln^2 x$

δ) $f(x) = \eta\mu(3x + 2)$ **ε)** $f(x) = \sigma\upsilon\nu(-\eta\mu x)$ **στ)** $f(x) = \sigma\upsilon\nu(e^x)$

ζ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(2x^3 + x^2)$ **η)** $f(x) = 4\eta\mu^3 x$ **θ)** $f(x) = 3^{x^2 - 5x}$

ι) $f(x) = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu(2x+3)}$ **ια)** $f(x) = \sqrt[3]{1 - \eta\mu x}$ **ιβ)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 x}}$

332. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων.

α) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ **β)** $f(x)=\sqrt[4]{x^5}$

γ) $f(x)=x^x, x>0$ **δ)** $f(x)=x^{\ln x}, x>0$

ε) $f(x)=(3+x^2)^{\sqrt{x}}, x>0$ **στ)** $f(x)=3^{\sqrt{x}-\sigma\upsilon\nu x}, x>0$

333. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : R→ R . Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g όταν:

α) $g(x) = f\left(2x^3+5\right)$ **β)** $g(x)= f(-2x)+ f\left(\frac{3}{x}\right)$

γ) $g(x) = \sigma\upsilon\nu f^3(x)$ **δ)** $g(x)=ln\left(2+ f^3(x)\right)$

ε) $g(x)=\eta\mu f(x)\cdot e^{f(x)}$ **στ)** $g(x)= f^3(e^{-2x})$ **.**

334. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(x^3\right)=6x^4+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα $f'(1)$ και $f'(0)$.

335. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g: $[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(\mathrm{x})=e^{g(3x)}$. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f'(0)}{f(0)}=3g'(0)$.

Παράγωγοι ανωτέρας τάξης

336. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2-3x+2$ **β)** $f(x)=x\ln \mathrm{x}$

γ) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ **δ)** $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$

337. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\eta\mu 2x & ,x\le 0\\ 2x\sigma\upsilon\nu x, & x>0\end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Θεωρητικές

338. Έστω η παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

β) Αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

339. Να βρείτε μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει $\left[P'(x)\right]^2=8P(x)+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

340. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\rho_1)^{\kappa}(x-\rho_2)^{\lambda}$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}^*, \rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{\kappa}{x-\rho_1}+\dfrac{\lambda}{x-\rho_2}$ για κάθε $x\neq\rho_1$ και $x\neq\rho_2$.

341. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{2x}-e^2}{x-1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x}-e}{x}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις-Παράγωγος αντίστροφης

342. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x+y)=f(x)-f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x)+f'(y)=0$.

343. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση, $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι $xf'(x)-yf'(y)=0$, για κάθε $x,y>0$.

344. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^5(x)+3f(x)=x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται **β)** Να υπολογίσετε το $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

345. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln^5 x+x^3, x\in(0,+\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}

β) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη , να βρείτε την $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

346. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+\ln^5 x+4, x\in(1,+\infty)$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη , να βρείτε την $\left(f^{-1}\right)'(5)$

347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^5+2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται **β)** Να υπολογίσετε το $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

Εφαπτομένη

Εξίσωση εφαπτομένης σε γνωστό σημείο

348. Αν $f(x)=x^3-16x$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία τομής της με τον άξονα x΄x.

349. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln(2+e^{2x})$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τεταγμένη $y_0 = \ln 3$.

350. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{2}{x}}$, x>0 . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ σχηματίζει τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $E=\frac{1}{4}$.

351. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x+\sigma\upsilon\nu x)=e^x+e^{2x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ με τους άξονες.

Εξισώσεις εφαπτομένων με άγνωστο το σημείο επαφής

352. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, ώστε να :

α) Σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ω = 135°.

β) Είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 3x-y+2=0$.

γ) Είναι κάθετη στην διχοτόμο της γωνίας xOy.

δ) Είναι παράλληλη στον άξονα χ'χ .

353. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι:

α) παράλληλη στην ευθεία $y=2x$, αν $f(x)=2x+\frac{1+\ln x}{x}$

β) κάθετη στην ευθεία $x+3y+1=0$, αν $f(x)=3x-\frac{\ln x}{x^2}$.

354. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{g(x)}{g'(x)}$, όπου g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι: αν η C_f τέμνει τον άξονα x΄x, τότε η εφαπτομένη της C_g στο σημείο αυτό είναι κάθετη στην ευθεία $x+y+1=0$.

Εύρεση παραμέτρων

355. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 2$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, -10)$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : x - 3y + 1 = 0$.

356. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, x \le 1 \\ \dfrac{\gamma}{x}, x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε να ορίζεται εφαπτομένη στη γραφική παράσταση (c) της f στο σημείο της $A(1, f(1))$, η οποία να είναι παράλληλη στην ευθεία $3x - y + 3 = 0$.

357. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x + 2}$ και $g(x) = x^2 - 4x + \lambda$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$ να εφάπτεται και στη C_g.

Εφαπτομένη που διέρχεται από γνωστό σημείο

358. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f της $f(x) = x^3 + 1$ που διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

359. Να βρείτε σημείο Α στη γραφική παράσταση (c) της συνάρτησης $f(x) = e^x$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της (c) στο Α να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

360. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $M(1, 0)$.

361. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\gamma, x \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(\kappa, \lambda)$. Αν από το Α άγονται δύο εφαπτομένες προς την C_f, να αποδείξετε ότι $\alpha^2\kappa^2 - \alpha\lambda + \alpha\gamma + \alpha\kappa\beta > 0$.

Η ευθεία ε εφάπτεται στη C_f

362. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να δείξετε ότι η ευθεία η: $y = 2x - 1$ εφάπτεται της C_f.

363. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=-x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+8x$. Στη συνέχεια, να βρείτε το σημείο επαφής και να εξετάσετε αν η ευθεία επανατέμνει την C_f.

364. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x>0$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ δεν εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

Κοινές εφαπτομένες

365. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3+x^2-5x-1$ και $g(x)=x^2-2x-3$. Να βρείτε τις εφαπτομένες των C_f, C_g, στα κοινά τους σημεία.

366. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ και $g(x)=\dfrac{x^2+x-1}{2x}$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, ενώ οι εφαπτομένες σε ένα άλλο σημείο είναι κάθετες.

367. Έστω $f(x)=x^2+x$ και $g(x)=x^2-2x+3$. Να εξετάσετε αν οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτόμενη.

368. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$. Αν Α είναι το σημείο τομής της C_f με τον $x'x$ και Β το σημείο τομής της C_g με τον $y'y$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g.

Μη κοινές εφαπτομένες

369. Έστω οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=g\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Αν η ευθεία η : y = 2x εφάπτεται της C_g στο $x_0=-1$ να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_1=1$.

370. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση για την οποία ισχύει f '(2) = 1 και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x)=f(e^x+1)-2$, $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο A(2, f (2)) εφάπτεται της C_g στο B(0,g(0)).

371. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, όπου η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $f(x)g(x)=1$ και $g'(x)=-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f,g στα σημεία $A\left(k, f\left(k\right)\right)$ και $B\left(k, g\left(k\right)\right)$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνουν τον άξονα χ΄χ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
i. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ **ii.** $\left(MN\right) =$ σταθερό.

Ρυθμός μεταβολής

372. Η θέση ενός κινητού που κινείται επί του άξονα $x'x$, δίνεται από τον τύπο $x\left(t\right) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, όπου t ο χρόνος σε sec, με $t \in \left[0, 6\right]$. Να βρείτε:
α) Την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού.
β) Τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το κινητό κινείται κατά τη θετική και κατά την αρνητική φορά.
γ) Το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό.
δ) Τη μέση ταχύτητα του κινητού.

373. Δύο υλικά σημεία Α και Β κινούνται πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Αν οι θέσεις τους κάθε χρονική στιγμή $t(\text{sec})$ δίνονται από τις συναρτήσεις $x(t) = t^2 - t$ και $y(t) = 4 - t^2$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της μεταξύ τους απόστασης τη χρονική στιγμή $t = 1$ sec.

374. Ενα σημείο Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right) = \sqrt{x}$. Τη χρονική στιγμή t_0 που βρίσκεται στο σημείο $A\left(4, 2\right)$, η τετμημένη του $x\left(t\right)$ αυξάνεται με ρυθμό $2\,m/\text{sec}$. Αν $\theta\left(t\right)$ είναι η γωνία $x\hat{O}M$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τη χρονική στιγμή t_0.

375. Σημείο Μ κινείται στην παραβολή $y = 2x^2 (x > 0)$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι 3 cm/sec τη στιγμή που η απόσταση Ο Μ του σημείου από την αρχή των αξόνων είναι $\sqrt{68}$ cm να βρεθεί:
α) ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης
β) ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που έχει τις δύο πλευρές του στους άξονες και διαγώνιο ΟΜ.
γ) ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta = MOx$
δ) το σημείο όπου οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του Μ είναι ίσοι.

376. Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2m/\sec$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = u \cdot t$, $t \in [0,5]$, όπου t ο χρόνος σε sec.

α) Να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου t.

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$, τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του ΟΑ είναι 6cm.

377. Υλικό σημείο κινείται επί της καμπύλης $y = x\ln x$, $x > 0$. Να βρείτε τη θέση του, τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του, είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του, αν γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου είναι θετικός.

378. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{x+1} - 1, x > -1$.

α) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Υλικό σημείο $M(x, y)$, $x > -1$ κινείται επί της C_f. Αν η τετμημένη του Μ μεταβάλλεται με ρυθμό 3 cm/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από τον άξονα x΄x.

379. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x > 0$. Ένα σημείο Μ κινείται στη C_f και έστω Κ η προβολή του στον άξονα χ΄χ. Αν το Κ απομακρύνεται από την αρχή Ο των αξόνων με ταχύτητα $3cm/\sec$, τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του Μ είναι 2, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

α) της απόστασης ΚΜ

β) της απόστασης ΟΜ

γ) της γωνίας $\theta = MOK$

δ) της απόστασης ΟΕ, όπου Ε είναι το σημείο τομής τυχαίας εφαπτομένης της C_f με τον άξονα x΄x.

380. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(3x-5)-1}{x-2} = 12$.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $f(1) = 1$ ii. $f'(1) = 4$

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(1, f\left(1\right)\right)$. Έστω σημείο Σ που κινείται στην (ε) ,με τετμημένη μεγαλύτερη από 1, της οποίας η ταχύτητα είναι $\frac{3}{4} cm/\sec$. Να βρείτε:

i) το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Σ.

ii) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΣ.

381. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Ένα σημείο $M(a, f(a))$ με $a > 0$ κινείται στη C_f έτσι ώστε η τετμημένη α να μεταβάλλεται με ρυθμό $4\ cm/\sec$. Αν $O\Lambda \perp OM$ όπου $\Lambda \in C_f$ και Ο η αρχή των αξόνων, να βρεθούν :

α) οι συντεταγμένες του Λ .

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΛ .

γ) ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΛ, τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι α = 2cm .

382. Σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς Oxy δίνεται ότι το σημείο Μ(x,y) κινείται σε τμήμα της ευθείας (ε) : $x + y - 2 = 0$ με $0 < x \le 4$. Η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ κινείται με ρυθμό $3\ cm/\sec$.Να βρεθούν τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $(OM) = \sqrt{10}$ cm :

α) ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης (ΟΜ) .

β) ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\vartheta = M\hat{O}x$.

383. Υλικό σημείο Μ κινείται επί της ε: $y = 2x - 2$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec. Να βρείτε:

α) Την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $K\left(3,4\right)$.

β) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το σημείο Μ, τις προβολές του σημείου Μ στους άξονες και την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο Κ.

384. Υλικό σημείο Μ κινείται επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1cm/sec.

α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $K\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

β) Έστω Α, Β είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης της C_f στο Μ με τους άξονες.

i. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ, την χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο Κ.

ii. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του τμήματος ΑΒ, την χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο K .

385. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1,\ x>0$. Υλικό σημείο $M(x,y),\ x>0$ κινείται επί της C_f με ταχύτητα του ως προς τον άξονα x΄x 1cm/sec.

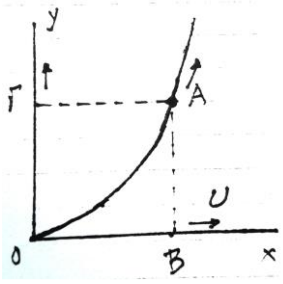
Τη χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$, να βρείτε:

α) την ταχύτητα απομάκρυνσής του από την αρχή Ο των αξόνων.

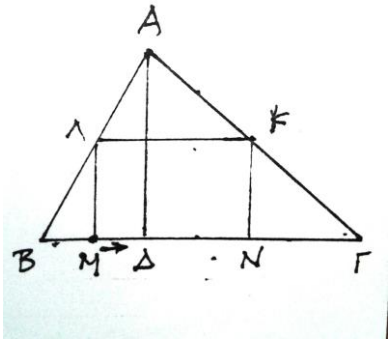
β) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $M\hat{O}x=\theta$.

γ) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζουν οι προβολές του Μ στους άξονες μαζί με τα σημεία Ο και Μ.

386. Σημείο Α κινείται πάνω στην παραβολή $y=\frac{1}{2}x^2$, $x>0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΒΑΓ τη στιγμή που η προβολή Β του Α στον Ox κινείται με ταχύτητα $u=1\ m/\sec$.



387. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=10 και ύψος ΑΔ=6 . Ένα σημείο Μ κινείται από το Β προς το Δ με ταχύτητα $0,5\ cm/\sec$. Αν ΚΛΜΝ είναι το εγγεγραμμένο στο τρίγωνο ορθογώνιο, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του όταν το σημείο Μ βρίσκεται στη μέση του ΒΔ .



Θεώρημα Rolle

Υποθέσεις - Συμπέρασμα του Θ. Rolle

388. Να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα Rolle στις παρακάτω συναρτήσεις, στα αντίστοιχα διαστήματα. Στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha,\beta)$, για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

α) $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$, $x\in[0,3]$ **β)** $f(x)=x^2-6x+8$, $x\in[2,4]$

γ) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x\le 0 \\ -x^3-4, & x>0 \end{cases}$, $x\in[-1,1]$ **δ)** $f(x)=\begin{cases} x^2-8x, & x\le 2 \\ x^2+x-10, & x>2 \end{cases}$, $x\in[1,3]$

389. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)=f(\alpha+1)=0$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot e^{-2x}$ στο $[\alpha,\alpha+1]$.

β) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=2f(\xi)$.

390. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2,3]$ με $3f(2)=2f(3)$, να αποδείξετε ότι:

α) Εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο $[2,3]$ για την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

β) Υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε $\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

Εύρεση παραμέτρων

391. Να βρείτε τα α, β, γ ∈ R ώστε για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta, 0\le x<1 \\ \gamma x^2+20x-9, 1\le x\le 2 \end{cases}$ να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,2].

392. Δίνεται η συνάρτηση, $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+4x+\beta, & x\in[-1,0) \\ x^2+\gamma x+1, & x\in[0,1] \end{cases}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα α, β, γ, ώστε να εφαρμόζεται για την f το θ. Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.

393. Αν η εξίσωση $x^4+2x^3+\alpha x^2-12\alpha x+1=0$, $\alpha\in\mathbb{N}^*$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες, να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου α.

Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Rolle

394. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\alpha-\beta)x^3+(2\alpha+\beta)x^2-3\alpha x$, $\alpha,\beta,x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της C_f με $\xi\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Μ, να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

395. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=2x^3-x-1$. Να δειχτεί ότι υπάρχει γ του διαστήματος $(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης C της g στο σημείο $M(\gamma, g(\gamma))$ είναι παράλληλη με την ευθεία που περνάει από τα σημεία Α(0, -1) και Β(1, 0). Να βρεθεί η εξίσωση της (ε).

396. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)\geq 1+\dfrac{f^2(x^2)}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη που ανήκει στο $(0,1)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

Αντιπαραγώγιση- Ύπαρξη ρίζας της f με εφαρμογή του Θ. Rolle για την F

397. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2017x^{2016}-2016(a+1)x^{2015}+a=0, a\in\mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

398. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\gamma}{2}+\delta=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

399. Δίνεται συνάρτηση f, άρτια και παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-2,2)$, τέτοιο, ώστε

α) $f'(\xi)+\eta\mu\xi=8\xi$ **β)** $f'(\xi)=2\xi e^{\xi^2}$ **γ)** $f'(\xi)-\eta\mu\xi-\xi\sigma\upsilon\nu\xi=0$

δ) $\sqrt{\xi^2+1}\cdot f'(\xi)=\xi$ **ε)** $f'(\xi)=2\xi-4\xi^3$ **στ)** $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu f(\xi)+\eta\mu\xi=0$

400. Δίνεται $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε:

α) $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ **β)** $\xi^{\nu}f'(\xi)+\nu\xi^{\nu-1}f(\xi)=0$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

γ) $f'(\xi)\eta\mu\xi+f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi=0$ **δ)** $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi-f(\xi)\eta\mu\xi=0$

401. Έστω συνάρτηση f με τις ιδιότητες :

- είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^3-\beta^3$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f'(\xi)=3\xi^2$.

402. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με $f(0)=4f(3)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+3}f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,3)$.

403. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $[2,3]$ με $g(2)=3, g(3)=2$ και $f(3)-f(2)=-1$.Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,3)$ ώστε $f'(g(\xi))\cdot g'(\xi)=1$.

404. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-3)f(x)+(x^2-3x)f'(x)=0$,έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,3)$

405. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(1)=4f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $\xi^2 f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$.

406. Δίνονται οι συναρτήσεις f,h συνεχείς στο $[0,1]$, παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ και $f(0)h(0)=f(1)h(1)$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\gamma)h(\gamma)=-f(\gamma)h'(\gamma)$.

407. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\dfrac{1}{\xi}+\dfrac{1}{1-\xi}$.

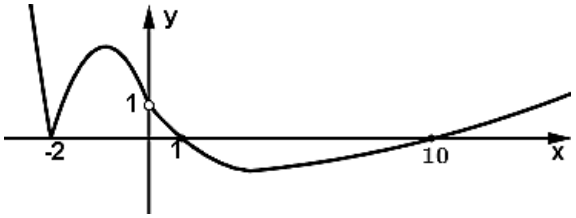
408. Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(1)-f(0)=1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{3\xi^3-2\xi^2+\xi}{\xi}$.

409. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0)=2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi+f(\xi)\eta\mu\xi=0$.

410. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g, συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}$. Αν $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

411. Δίνεται μία συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x$ στα σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$,να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f^3(\xi)f'(\xi)=\xi^3$.

412. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-x^3}{x}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{|g(x)|}$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)-1}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $x_0f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$.

στ) Αν η γραφική παράσταση της g έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1,g(1))$ την ευθεία ε: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(1,f(1))$.

Εύρεση αρχικής με πολλαπλασιασμό της $e^{F(x)}$

413. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=ef(1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+2xf(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

414. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g στο $[3,4]$ με $f(3)=f(4)$, $g(3)$ ρίζα της εξίσωσης $e^{2x}+e^x-2=0$ και $g(4)$ ρίζα της $x^3+x=0$.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+g'(x)f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(3,4)$.

415. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+\frac{2\ln x}{x}f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

416. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=e^{\frac{\lambda}{\kappa}(\beta-\alpha)}f(\beta)$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε $\kappa f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$.

417. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g,h, όπου η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $g(x)=f(\alpha)x-e^{\alpha}$, $h(x)=f(\beta)x-e^{\beta}$, $\alpha<\beta$, για τις οποίες ισχύει ότι $(goh)(x)=(hog)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)-f(\xi)+1=0$.

418. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1)-f(0)=1$.

α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi_1)=2\xi_1$.

β) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi_2)=\frac{f(1)-1-f(\xi_2)}{\xi_2-1}$

Ύπαρξη ρίζας της $f''(x)=0$

419. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha\beta<0$, με $f(\alpha)=f(\beta)=f(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

420. Έστω $f:[2,6]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση 3 φορές παραγωγίσιμη στο $[2,6]$ με $f(2)=f(6)$ και $f'(2)=f'(6)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,\ 6)$, τέτοιο ώστε : $f^{(3)}(\xi)=0$.

421. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, $f(1)=e-1$ και $f(2)=e^2-8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)+6\xi=e^{\xi}$.

422. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=1$, $f(2)=4-\ln 2$ και $f(e)=e^2-1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)-\dfrac{1}{\xi^2}-2=0$.

Το πολύ ν ρίζες-Εις άτοπον απαγωγή-Μοναδικότητα ριζών

423. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

424. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)=0$, $f(1)=3e+6$ και $f'(x)\neq 3e^x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=3e^{\xi}+5\xi$.

425. Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)-f(1)=-e$ και $f''(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=e^{\xi}+1$.

426. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x-x^2+x-2=0$, έχει το πολύ 3 πραγματικές ρίζες.

427. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda xe^x=e$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $x\in\mathbb{R}$, έχει το πολύ δύο πραγματικές .

428. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(2,3)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)f''(x)>0$ για κάθε $x\in(2,3)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(2,3)$.

429. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία ρίζα στο $(1,2)$.

α) $x^3=2-3\ln x$ **β)** $x^4+x^3=30-20x^2$

430. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία ρίζα:

α) $x-\eta\mu x+x^3=0$ **β)** $e^{3x}-3e^{2x}+15e^x-2=0$ **γ)** $e^x+x^3=e^{-x}$.

431. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$, για την οποία ισχύει: $6xf(x)\neq(3x^2-12)f'(x)$, για κάθε $x\in[-2,2]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2)f(-2)\neq 0$ **β)** Η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2,2)$.

432. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ και αντιστρόφως.

433. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.

β) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'(x)=0$, υπάρχει το πολύ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Συνδυασμός θεωρημάτων

434. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f'(x)$ συνεχή στο $[0,1]$, για την οποία ισχύουν :

- $f(1)=f(0)+\dfrac{1}{2}$ και
- $f'(0)>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=x_0$.

β) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi$.

435. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $f(3)<0<f(4)$ και $f(5)f(4)<0$. Να αποδείξτε ότι η C_f έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

436. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,4]$, για την οποία ισχύει ότι: $f(1)+f(2)=f(3)+f(4)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$.

437. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,3]\to(0,+\infty)$ με $f(0)f(1)=f(2)f(3)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

Ύπαρξη σημείου της C_f που η εφαπτόμενη διέρχεται από σημείο

438. Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και c ∉ [α, β]. Να δείξετε ότι :

α) για την $G(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$, όπου c ∉ [α, β] εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\ \beta]$.

β) αν c ∉ [α, β], τότε υπάρχει $c_0\in(\alpha,\ \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(c_0, f(co))$ να διέρχεται από το (c, 0).

439. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$, με $3f(1)=f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$, τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

440. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha>0$, η οποία έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες . Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2, με $\rho_1\neq\rho_2$.

β) $\beta^2>3\alpha\gamma$

γ) $f''(\rho_1)+f''(\rho_2)=0$.

Θ.Μ.Τ.

Εφαρμογές Θ.Μ.Τ. σε γνωστή f- Σχέσεις για τιμές της f '- Γεωμετρική ερμηνεία

441. Να αποδείξετε ότι ισχύει το Θ.Μ.Τ. για τις επόμενες συναρτήσεις στο αντίστοιχο διάστημα και στη συνέχεια να βρείτε τα ξ για τα οποία ισχύει το θεώρημα.

α) $f(x)=x-x^2$, $x\in[1,2]$ **β)** $f(x)=e^x$, $x\in[0,1]$

γ) $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\le 1 \\ -x^2+3x-2, & x>1 \end{cases}$, $x\in[0,2]$

442. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x-1}$. Να δείξετε ότι:

α) ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[e,e^2]$

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(e,e^2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)<0$

γ) $f(\xi)>\dfrac{1}{\xi}$.

443. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, για την οποία ισχύει $f(3)=12$ και $f(1)=4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y=4x-2$.

444. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$ με $\alpha<\beta$. Να δειχτεί ότι υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης y = f(x) κάθετη στην ευθεία $x-y+3=0$.

445. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0, 2], παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και $f(2)=f(0)+4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (0, 2) τέτοιος, ώστε να ισχύει $f'(\xi)=2$.

446. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

447. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=3, f(1)=5$, και $f'(x)\le 2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x+3$ για κάθε $x\in[0,1]$

448. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$ και $f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

449. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $f'(x_1)+\alpha+\beta=e^{x_2}$.

450. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη για κάθε $x\geq 1$ και τέτοια ώστε να ισχύουν: $f(1)=0$, $f(x)\leq 1$ και $f'(x)\leq 1$ για κάθε $x>1$. Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση $g(x)=x\cdot f(x)$ στο $[1,x]$, με $x>1$ και στην συνέχεια να αποδείξετε την ανισότητα $f(x)<x-\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>1$.

Εύρεση Παραμέτρων

451. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, -1\leq x\leq 1\\ \alpha x^2+\beta x+2, 1\leq x\leq 2\end{cases}$

α) Να βρείτε τα α, β ∈R ώστε να ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-1,2]$

β) Να βρείτε τά $\xi\in(-1,2)$ ώστε $3f'(\xi)=f(2)-f(-1)$.

452. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}ax^2+\beta x, x\leq 1\\ \dfrac{1}{x}, x>1\end{cases}$. Να βρείτε τα α, β ώστε να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο [0,2] και μετά να λύσετε την εξίσωση $2f'(x)=f(2)-f(0)$ στο (0,2).

453. Δίνεται συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β), και ισχύει $f'(x)\leq -5$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Αν $f(\alpha)=-\alpha^2+5\alpha-25$ και $f(\beta)=\beta^2+\beta+9$, να δείξετε ότι $\alpha=5$ και $\beta=-3$.

Διαίρεση διαστήματος

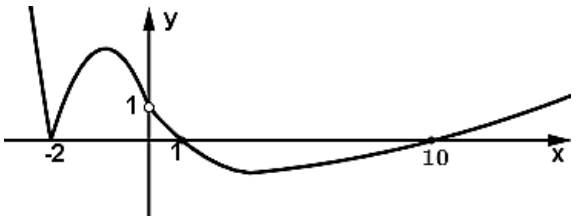
454. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=3\beta$ και $f(\beta)=3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$, τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-6$.

455. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,9]$, με $f(0)=f(9)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,9)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=0$.

456. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,10]$, με $f(1)=4$ και $f(10)=9$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,10)$ τέτοια, ώστε: $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=5$.

457. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)=\frac{\alpha}{5}$ και $f(\beta)=\frac{\beta}{5}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε: $3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=1$.

458. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-x^3}{x}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{|g(x)|}$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{f(x)-1}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $x_0f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$.

στ) Αν η γραφική παράσταση της g έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1,g(1))$ την ευθεία ε: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(1,f(1))$

.

Θ. Bolzano ή Ε,Τ. και Θ.Μ.Τ

459. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με f' γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$, $f(-1)=1$ και $f(1)=5$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=3$.

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=1$

γ) $f(0)>3$.

460. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\chi_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$.

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε: $2f'(\xi_1)(x_0-\alpha)=3f'(\xi_2)(\beta-x_0)$.

γ) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\dfrac{5}{f'(\xi)}=\dfrac{3}{f'(\xi_1)}+\dfrac{2}{f'(\xi_2)}$.

461. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, για την οποία ισχύει $f(1)=4$ και $f(2)=1$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε, $f(x_0)=3x_0-2$.

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=9$.

Ρίζα της f"

462. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[2,6]$ για την οποία ισχύει: $2f(4)=f(2)+f(6)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,6)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$.

463. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)+f(2)=f(0)+f(3)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

464. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1)-f(0)=1$ και $f'(0)=f'(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(0,1)$.

465. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Πρόσημο τιμής των f΄, f΄΄

466. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)=f'(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)<0$.

467. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)<0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2)>0$.

Απόδειξη ανισοτήτων με μία μεταβλητή

468. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\alpha<\beta$, ισχύει:

α) $\dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta}}<\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}<\dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$ **β)** $\nu(\beta-\alpha)\alpha^{\nu-1}<\beta^{\nu}-\alpha^{\nu}<\nu(\beta-\alpha)\beta^{\nu-1}$, $\nu\geq 2$

469. Να αποδείξετε ότι: α) $2-\dfrac{e}{\pi}<\ln\pi<\dfrac{\pi}{e}$ **β)** $e^{e}\cdot\pi^{\pi}>e^{2\pi}$

470. Να αποδείξετε ότι **α)** $\dfrac{1}{x+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$, $x>0$ **β)** $\dfrac{2}{x+1}<\ln\dfrac{x+1}{x-1}<\dfrac{2}{x-1}$, $x>1$

471. Να αποδείξετε ότι $x+1\leq e^{x}\leq xe^{x}+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

472. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}\right)$ **και** $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)$ **β)** $\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{3}$ και $\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}$

473. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι: $f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

474. Δίνεται συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $2f(x)<f(x-1)+f(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

475. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\gamma)=0$, $\gamma\in(\alpha,\beta)$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $(\beta-\gamma)f(\alpha)+(\gamma-\alpha)f(\beta)>0$.

Σύνθετα θέματα

476. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x)\leq -x^2+x-4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

477. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x)\geq e^{x}+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

478. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με f' γνησίως αύξουσα και $f'(5)>0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

479. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+2)+f(x)-2f(x+1)\right]=0$.

480. Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(-2,1)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-4+f\left(x^2-8\right)\right)=-2$.

γ) να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία ε: $y=-\frac{3}{4}x+2$.

Σταθερή συνάρτηση – Εύρεση συνάρτησης

481. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)f(-x)$ είναι σταθερή και να βρείτε τη τιμή της.

482. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}=0, x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

483. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f(x)=xf'(x)+2$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

484. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(f(x)-e^x\right)\left(f'(x)-e^x\right)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

485. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

α) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+2x$, $f(0)=1$ **β)** $f'(x)=\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu 3x$, $f(0)=1$

γ) $f'(x)=2e^{2x}+\sqrt{x}$, $x>0$, $f(1)=e^2$ **δ)** $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $x>0$, $f(1)=0$

ε) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $f(0)=0$ **στ)** $f'(x)=3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

486. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

α) $f'(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$ και $f(1)=-1$ **β)** $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}$, $f(1)=e$

γ) $f'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$, $f(1)=1$ **δ)** $f'(x)=xe^x+e^x$, $f(0)=1$

487. Να βρείτε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

α) $f''(x)=6x$, $f'(0)=f(0)=2$ **β)** $f''(x)=12x^2-9$, $f'(0)=4f(0)=4$

488. Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f παραγωγίσιμης στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

α) $f(x)+xf'(x)=3x^2+1$ και $f(1)=2$

β) $xf'(x)+f(x)=e^x$ και $f(1)=e+1$

γ) $xf'(x)+x^2=f(x)+x^2e^x$ και $f(1)=e-1$

δ) $xf'(x)-f(x)=x^2\eta\mu x+x^3\sigma\upsilon\nu x$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$

489. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

α) $xf'(x)+(1-x)f(x)=0$ και $f(1)=e, x>0$

β) $xf'(x)=(x+1)f(x)$ και $f(1)=e, x>0$

490. Να βρείτε συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x)+xf'(x)+f''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(0)=0$ και $f(0)=2$.

491. Να βρείτε συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=1$.

492. Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο της $M(x,f(x))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $4x\sqrt{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισχύει $f(1)=9$.

Εύρεση της f όταν $f'(x)+g(x)f(x)=0$

493. Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

α) $f'(x)-2f(x)=e^{3x}$, $f(0)=2$ **β)** $f'(x)+2xf(x)=2x$, $f(0)=1+e$

γ) $2f'(x)+4f(x)=1$, $f(0)=1$ **δ)** $f'(x)-f(x)=2$, $f(0)=2$

494. Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

α) $f'(x)-2xf(x)=e^{x^2}$, $f(0)=0$ **β)** $f'(x)+\text{συν}xf(x)=\text{συν}x$, $f(0)=1$

γ) $2f'(x)+3f(x)=2$, $f(0)=1$ **δ)** $f'(x)+e^x f(x)=e^x$, $f(0)=0$

Εύρεση της f σε ένωση διαστημάτων

495. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

α) $xf'(x)=3x^3-4x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=6$.

β) $(x+1)f'(x)=2x^2-8x-10$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.

496. Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$xf'(x)=e^{\frac{1}{x}}(x-1)$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$. Να δείξετε ότι

$f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

497. Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία,για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει :

α) $f(x)+xf'(x)=6x^5+4x^3+2x$ **β)** $(x-1)f'(x)=3x^2-6x+1-f(x)$

γ) $f(x)=xf'(x)-x^2e^x$, $f(1)=e$ **δ)** $f(x)=xf'(x)$, $f(1)=1$

498. Έστω μια συνάρτηση f με $f'(x)=\begin{cases}3x+1, x<0\\ 2x^2+1, x\geq 0\end{cases}$. Αν $f(1)=\frac{2}{3}$ να βρείτε την f.

499. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x)=\begin{cases}2x-6, x\geq 3\\ -2x+6, x<3\end{cases}$ και $f(1)=20$.

Να βρείτε τον τύπο της f.

Εύρεση της f με βοηθητική συνάρτηση

500. Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $e^{f(x)}\neq -x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f'(x)e^{f(x)}+1=\frac{x}{x+e^{f(x)}}$, για κάθε x ∈ R . Να βρείτε τη συνάρτηση f.

501. Εστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)3^{f(x)}\ln 3+2x=\dfrac{e^{2x}+x}{x^2+3^{f(x)}}$,για κάθε x ∈ R . Να βρείτε τη συνάρτηση f.

502. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

α) $f'(x)=\dfrac{x-e^{-x}}{f(x)}$ $f(0)=2$, $f(x)\neq 0$

β) $2f'(x)=e^{x-f(x)}$, $f(0)=0$

γ) $f'(x)=\dfrac{4x^3+2x}{3f^2(x)}$, $f(1)=2$, $x>1$, $f(x)>0$

503. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

α) $f'(x)f(x)=e^{2x}$ και $f(0)=1$

β) $f''(x)+2f(x)=0$ και $f(0)=f'(0)=0$

γ) $f''(x)+f^{199}(x)=0$ και $f(0)=f'(0)=0$.

504. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$\left(f'(x)-f(x)\right)\left(x^2+1\right)=2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$.

505. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$f'(x)f(x)+f(x)+x=-xf'(x)$ και $f(1)=0$.

506. Εστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $e^x f(x)+2e^x f'(x)+\left(e^x+1\right)f''(x)=-\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $f(0)=0$ και
- $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x^2+1}$.

Εύρεση τύπου συνάρτησης δύο μεταβλητών

507. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :
$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $f'(0)=1$.

508. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι
$f(xy)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$ και $f(1)=0$ και $f'(1)=1$.

Σύνθετες ασκήσεις

509. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f(e)=1$ και $xf(x)f'(x)=\ln x$ για κάθε $x>1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>1$

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να αποδείξετε ότι $1-\frac{\alpha}{\beta}\le \ln\frac{\beta}{\alpha}\le \frac{\beta}{\alpha}-1$ για κάθε $\alpha,\beta>1$

510. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν: $f''(x)=f(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2$ και $f'(0)=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)-f'(x)-1\right)e^x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)-f(x)=-1-2e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

γ) Να βρεθεί ο τύπος της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της.

511. Δίνεται πραγματική συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f'(x)-e^{-f(x)}=1$,
- $f(0)=0$.

α) Να δειχτεί ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\ln\left(2e^x-1\right)$ για $x\ge 0$.

β) i) Να γίνει μελέτη της f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) ii) Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\xi_1,\xi_2>0$ ισχύει $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)<4$.

δ) i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $x_0=0$

ii) Να δείξετε ότι $f(x)\le 2x$.

iii) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Μονοτονία συνάρτησης

Εύρεση μονοτονίας συνάρτησης με χρήση 1ης παραγώγου

512. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x)=x^4-2x^2+5$ **β)** $f(x)=\sqrt{x+1}$ **γ)** $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$

δ) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ **ε)** $f(x)=e^{x^3-12x}$ **στ)** $f(x)=x\ln x$

ζ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ **η)** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ **θ)** $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$

513. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 1\\ x^2-5x+5, & x>1\end{cases}$ **β)** $f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{2-x}, & x<2\\ \sqrt{x^2-2x}+1, & x\ge 2\end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases}4x^2-4x, & 0\le x\le 4\\ x^3-3x, & x<0 \text{ ή } x>4\end{cases}$ **δ)** $f(x)=\left|x-x^2\right|+1$

Εύρεση μονοτονίας συνάρτησης με χρήση των f΄,f΄΄,f$^{(3)}$,…

514. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x)=2e^{x+1}-x^2-4x+3$ **β)** $f(x)=2x\ln x-x^2+1$

γ) $f(x)=4e^x+2x^2-4x$

515. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,x_0]$, $x_0>0$, για την οποία ισχύει $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,x_0]$ και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$.

516. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με f' γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Αν $f(0)=0$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{2x}+\dfrac{f(x)}{x}+\ln 2^x$, είναι γνησίως αύξουσα, στο $(0,+\infty)$.

Εύρεση τιμών παραμέτρων

517. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση:

α) $f(x)=x^3+\lambda x^2+3x-2007$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(x)=\ln\left(x^2+\lambda^2\right)-\lambda^2 x+1, \lambda\neq 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Εύρεση πρόσημου της f και σύνολο τιμών

518. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=2(x+1)\ln(x+1)-x^2-2x-5$, $x\geq 0$

β) $f(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2-e^x$.

γ) $f(x)=2e^x+x^2-2x+3$, $x\geq 0$

δ) $f(x)=e^x+3x^6+2x^2-x-1$

519. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3e^{2x-1}+2$, με $x\geq\frac{1}{2}$

α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε την f^{-1} .

520. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+e^{2x}-2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $f\left(-\frac{1}{100}\right)$ και $f\left(\frac{1}{100}\right)$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\sqrt[10]{5}\right)$, $f\left(\sqrt[20]{10}\right)$ και $f\left(\sqrt[30]{15}\right)$.

521. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει ότι: $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

522. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha)f'(\beta)<0$.

Απόδειξη ανισοτήτων με παράγουσα βοηθητική συνάρτηση

523. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει : $f'(x)>(1-x)f''(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

524. Να αποδείξετε ότι:

α) $\ln(x-1)<x-2$, $x>2$ **β)** $e^x(x+1)>1$, $x>0$ **γ)** $x\sigma\upsilon\nu x<\eta\mu x$, $x\in(0,\pi)$

δ) $e^x-1>x+\frac{x^2}{2}$, $x>0$ **ε)** $e^x<(1+x)^{1+x}$, $x>0$ **στ)** $\ln x<e^{x-1}-1$, $x>1$

ζ) $\sigma\upsilon\nu x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $x > 0$ **η)** $x + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

525. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι $f'(x) < g'(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και $f(\beta) = g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από το γραφική παράσταση της g στο διάστημα (α, β).

526. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $2 < f''(x) < 6x$ για κάθε $x > 0$, $f'(0) = 0$ και $f(0) = 1$. Να αποδείξετε ότι:
$(x-1)^2 < f(x) < x^3 + 1$ για κάθε $x > 0$.

527. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει:
$f''(x) > e^x - 2$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f'(0) = 2$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(0) - f(1) < 0$
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων . Απόδειξη ισοτήτων και ανισοτήτων

528. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $2x^2 + x + \ln x = 3$ **β)** $e^x + e^{3x} = 2$ **γ)** $\ln(x-1) + x^2 + x - 6 = 0$
δ) $\ln x^4 = x^4 - 1$ **ε)** $3^{-x} + 3^{-2x} = 2$ **στ)** $\ln(x-1) + e^{x-2} = 1 - (x-2)^{1821}$

529. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $2x^2 + x + 3\eta\mu x - 3 \geq 0$ **β)** $e\ln x \leq x$ **γ)** $e^x \geq x - 1, x \geq 0$

530. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x^2 - 3x + 7) + 2^{x^2-3x+7} < \ln(2x+1) + 2^{2x+1}$, $x > 0$

531. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^x$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να λύσετε τις εξισώσεις
i) $e^{x^3+x} - e^{2x} = x - x^3$ **ii)** $e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 = 0$
γ) Να λύσετε την ανίσωση: $e^{x^2-1} + x^2 > 2$

Πλήθος ριζών

532.Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,e]\to(0,1)$, με $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(1,e)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x(1-\ln x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

533.α)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-1-\eta\mu 2x$, $x\in\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση $x^3+2x-1=\eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

534.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x)>\dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln\left(x^2+2x+5\right)+2$, το πολύ σε ένα σημείο.

535.Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$, $x\in\mathbb{R}$, $\beta^2<3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

536.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,3]$. Αν $f(1)=-3$ και $f'(x)>4$ για κάθε $x\in(1,3)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,3)$.

537.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2x^2+x+\ln x=3$ **β)** $e^x+e^{3x}=2$ **γ)** $3^{-x}+3^{-2x}=2$ **δ)** $3^x+4^x=5^x$.

538.Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

α) $x^3-2x^2+7x-4=0$ **β)** $x^4-4x^3+4x^2-2=0$ **γ)** $\dfrac{2x^3+3x^2}{6}=2x-1$

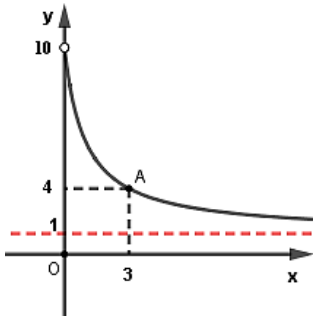
539.Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $2x^3+6\lambda x^2-1=0,\lambda>0$.

540.Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

α) $xe^x-2=0$ **β)** $12x^4-14x^3-3x^2-4=0$

541.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει δύο θετικές ρίζες και μία αρνητική.

542. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

δ) Αν η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, να δείξετε ότι $2g(5)<g(4)+g(6)$.

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{g(x)-10}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right]$ **iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

στ) Υλικό σημείο Μ κινείται επί της C_g και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα το δευτερόλεπτο. Αν $f'(3)=e^{-3}$ να βρείτε την ταχύτητα απομάκρυνσής του από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(3,4)$.

543. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5x^4-30x^2+20x+5$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^4+4x+1=6x^2$. Πόσες από τις ρίζες είναι ακέραιες;

γ) Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=x^4+4x+1$ και $h(x)=6x^2,\ x\in\mathbb{R}$, δέχονται κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)-6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$.

Θεωρητικές

544. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, για την οποία είναι $f'(x)>e^x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$, έχει ακριβώς μία ρίζα για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

545. Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f''(x)\neq0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη.

546. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=4$ και $f(2)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $f(x)<f'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε: $f(\xi)\geq f'(\xi)$.

547. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$x^2+1<f'(x)<x^2+x+2$ για κάθε $x>0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

548. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $A=f(2)+f(-2)$ και $B=f(1)+f(-1)$.

549. Δίνεται συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, στο σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν, γωνία 45^o.

Ακρότατα συνάρτησης

Εύρεση τοπικών ακροτάτων

550. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις;

α) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$ **β)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

γ) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ **δ)** $f(x)=2x+2\sigma\upsilon\nu 2x, \mathrm{x}\in[\mathrm{o},\pi]$

551. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<2 \\ x^2-6x, & x\geq 2 \end{cases}$ **β)** $f(x)=\begin{cases} -x-2, & x<0 \\ -5, & x=0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$

Κρίσιμα σημεία

552.Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $g'(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $g(e)=e$. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\ln g(x)}{g(x)}$.

553.Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$f^3(x)-6f^2(x)+\lambda f(x)=x^3-6x^2+2$. $\lambda>12$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ακρότατα και Ρίζες - Πρόσημο της f-Επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων

554.Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi x-x\geq 0$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **β)** $2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\geq 3x$, $\chi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

γ) $e^x\geq xe$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **δ)** $x^2\geq 2\ln x+1$, $x>0$

ε) $x^x(2-x)^{2-x}\geq 1$, $x\in(0,2)$ **στ)** $x^3+3x^2+6x+6\leq 6e^x$

555.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $x>0$.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $e^{x^2}\geq x^{2e}$.

γ) Αν υπάρχει $\alpha>0$ για τον οποίο για κάθε $x>0$ ισχύει $\alpha^{x^2}\geq x^{2e}$, να αποδείξετε ότι $\alpha\geq e$.

556.Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{e}\leq\left(x^2-x+1\right)e^{-x}\leq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Εύρεση πλήθους ριζών της εξίσωσης f(x) = 0.

557.Έστω μια συνάρτηση f:R→R με f '(x) ≠ 0 για κάθε x∈R. Αν η f ΄ είναι συνεχής να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(e^{-x})=f(x+a)$.

558.Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$, ώστε η εξίσωση $x^3-12x+\alpha=0$ να έχει τρεις ρίζες πραγματικές και άνισες.

Ύπαρξη ακρότατου

559.Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - 2x + 3$ να παρουσιάζει ελάχιστο.

560.Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $2x\sqrt{x}$ - 2x - lnx. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο στο πεδίο ορισμού της.

Πρόσημο ολικού ακρότατου και τιμών της f

561.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x - 1,\ x \in \mathbb{R}, \lambda > 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το πρόσημο του ακρότατου.

562.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\lambda} e^{-\lambda^2 x}$, $\lambda > 0$, $x > 0$. Να βρείτε το λ, ώστε το μέγιστο της f να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο.

563.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, γίνεται ελάχιστος.

Θεωρητικές -Σύνθετα θέματα

564.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^3}{3} + \frac{\gamma x^2}{2} + x - 2007$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, x, \gamma \in \mathbb{R}$.

Αν η f έχει τρία διαφορετικά τοπικά ακρότατα, να αποδείξετε ότι $\beta^2 > 3\alpha\gamma$.

565.Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $f'(x) + (x-1)^3 f^2(x) = 0$. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

566.Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f δεν είναι "1–1", να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο.

567.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f(0) < f(2) < f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

568.α) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,8]$ με $f(2) > f(0) > f(8) > f(6)$, να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

β) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,8]$ και $f(8) > f(2) > f(6) > f(0)$,να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

569.Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,4]$ με $f(2) < f(1) < f(4) < f(3)$, να αποδείξετε ότι η f' έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο.

570.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,2]$, με $f(0) = f(2) = 1$ και $f(1) = 4$. Αν το $x_0 = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$,να αποδείξετε ότι:

α) η f δεν έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,1)$.

β) να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

571.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha > 0$ με $f(-\alpha) = f(\alpha) = \alpha$ και $f(0) = 2\alpha$ **.** Αν το $x_0 = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) η f δεν έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,\alpha)$.

β) να βρείτε τα ακρότατα της f.

γ) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-\alpha,\alpha)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = -1$.

δ) να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in [-\alpha,\alpha]$ τέτοιο, ώστε

$$2f(x_1) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + f\left(-\frac{\alpha}{2}\right).$$

572.Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ με $f(1) = 3$, $f(5) = 4$ και σύνολο τιμών το $[-1,6]$.Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1, x_2 \in (1,5)$ $x_1 \neq x_2$ τέτοιες ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

β) υπάρχει $\xi \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

γ) υπάρχει $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)\left[f'(x_0) + f^3(x_0)\right] = x_0$.

δ) η ευθεία $y = -x + 6$ τέμνει τη C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $\rho \in (1,5)$.

Θεώρημα Fermat

Ακρότατα

573. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^2 - 4x + 1, x \in [1,2]$ **ii)** $f(x) = (x-1)e^{-x}, x \in [0,2]$

574. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19 \ , & x \in [0,1] \\ -x^2 + 18x - 1 \ , & x \in (1,2] \end{cases}$$

Εύρεση τιμών παραμέτρων ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

575. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2$, $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στα $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

576. Να βρείτε τις τιμές των α, $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta lnx$ να παρουσιάζει ακρότατα στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Να καθορίσετε το είδος των ακρότατων.

577. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$2f^3(x) + x^2 = \frac{1}{4} x f(x)$ για κάθε $x > 0$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε να βρείτε το x_0.

Ανισοϊσότητα → Fermat → Ισότητα

578. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$xg(x) - e^x \le \eta\mu 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $g(0) = 3$.

579. Αν $2\ln x \ge \alpha \frac{x-1}{x}$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

580. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $e^{x-1} f(x) + x \le x^2 - 2, x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = -2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

581. Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $2f(x) \ge f(3) + f(4)$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(3) = f(4)$

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (3,4)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f'' στο σημείο $M(\xi, f''(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

582.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\alpha - (x+\alpha)e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

583.Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = |e^x + \alpha x - 1|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ **β)** Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

584.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $\alpha x^2 + (\alpha+1)x + 1 \le f(x) \le \alpha x^2 + \beta x + 1$ για κάθε $x > -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) i) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$ **ii)** Να δείξετε ότι $\beta = \alpha + 1$.

Έστω ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = (x+1)^2$, $x > -1$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Αφού αποδείξετε οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} δεν τέμνονται στη συνέχεια να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές τους παραστάσεις.

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x$ έχει τρείς θετικές λύσεις.

585.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^3 + x$, $g(x) = x^4 + \beta x - 2\beta - 6$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία ε: $y = 4x - 2$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 1$

β) $\beta = -19$

γ) η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 2$ είναι $f(x) + f^{-1}(x) > 11$.

δ) $g(x) - 14 \le g'(x)(x-1)$ για κάθε $x \ge 1$.

Πλήθος ακροτάτων

586. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x^4}{4}+\frac{\beta x^3}{3}+\frac{\gamma x^2}{2}+x-2007$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, $x,\gamma\in\mathbb{R}$. Αν η f έχει τρία διαφορετικά τοπικά ακρότατα, να αποδείξετε ότι $\beta^2>3\alpha\gamma$.

587. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $f'(x)+(x-1)^3 f^2(x)=0$. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

588. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$, $\alpha<\beta<\gamma$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

589. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει $f^2(x)+x^2=1+2xf(x)$ τότε η f δεν έχει ακρότατα.

Αποκλεισμός ακρότατου στα άκρα του [α, β]

590. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, με $f(x)=(x^2-1)f'(x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$. Να αποδείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

591. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ με $f'(0)<0$. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο στο 0

592. Έστω $f:[2,4]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(a)>0, f'(\beta)<0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Προβλήματα

593. Έστω $M(x,y)$ σημείο της ευθείας $\varepsilon: 2x+3y=6$ με τετμημένη $x\in(0,3)$. Αν Κ,Λ οι προβολές του Μ στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα και Ο η αρχή των αξόνων, να βρείτε το Μ, ώστε το ορθογώνιο ΟΚΜΛ να έχει μέγιστο εμβαδόν.

594. Να βρείτε την ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^3-2x^2+x+5$ και $g(x)=x^3-3x^2+9x-15$.

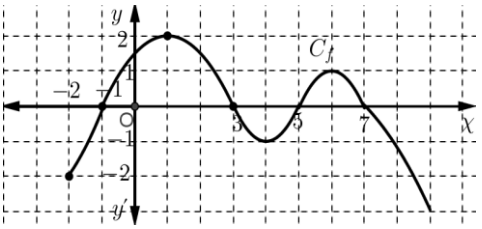
595. Να βρείτε σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^x+1$ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $A(1,1)$.

596. Έστω $M(x,y)$ σημείο της ευθείας $\varepsilon: 2x+3y=6$ με τετμημένη $x\in(0,3)$. Αν Κ,Λ οι προβολές του Μ στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα και Ο η αρχή των αξόνων, να βρείτε το Μ, ώστε το ορθογώνιο ΟΚΜΛ να έχει μέγιστο εμβαδόν.

597. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες, τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

Κυρτότητα – Σημεία Καμπής

Μελέτη συνάρτησης ως προς την κυρτότητα-σημεία καμπής

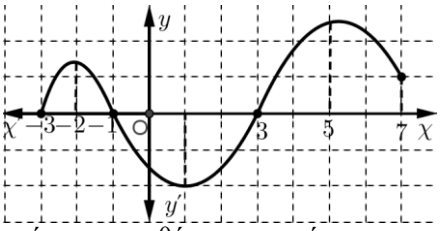


598. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f μίας συνάρτησης f.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f′

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f

γ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα κυρτότητας της f,και τις θέσεις των σημείων καμπής της.

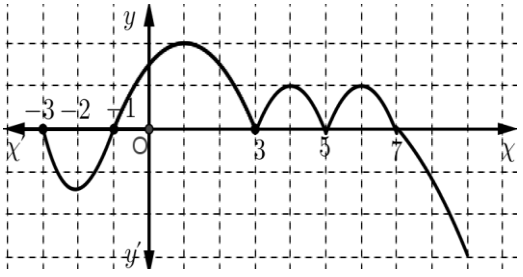


599. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f′ μίας συνάρτησης f.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών **τ**ης συνάρτησης f'

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f

γ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα κυρτότητας της f, και τις θέσεις των σημείων καμπής της.



600. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f′ μίας συνάρτησης f'.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f'.

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα **μ**ονοτονίας και τις θέσεις τοπικών **α**κροτάτων της f

γ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα κυρτότητας της f και τις θέσεις των σημείων καμπής της.

601. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής τους (αν υπάρχουν).

α) $f(x)=x^4-6x^2+7x-2$ **β)** $f(x)=x^4$

γ) $f(x)=\dfrac{2e^x+1}{e^x-2}$ **δ)** $f(x)=x\ln x$

602. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=\begin{cases}-2x^2-x^3, & x\le 0\\ 4x^2-x^3, & x>0\end{cases}$ **β)** $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, & x\le 0\\ x^3-6x^2-4x+6, & x>0\end{cases}$

Κυρτότητα και εφαπτομένη

603. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+(x-1)^4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^x+(x-1)^4\ge -3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

604. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-e^{-x+1}$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 2x-3$ για κάθε $x>0$.

605. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3x}{x-1}=4$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$.

β) Αν η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x)-7x+4\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Εύρεση παραμέτρων

606. Αν $|\alpha|<1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=-\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{\alpha x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+3x-1$ είναι κοίλη στο R.

607. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^4-\alpha x^3+\dfrac{3}{2}x^2-1$ να είναι κυρτή στο R.

608. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}, x>0, a>0$.Να βρείτε τη τιμή της παραμέτρου α ,ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της να διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{4}{a},0\right)$.

609. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)x^3-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)x^2+2x-5$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0=\frac{3}{2}$.

610. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$, $\alpha\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$. Αν η C_f έχει δύο σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\beta^2>\frac{8}{3}\alpha\gamma$.

Κυρτότητα από συνθήκη

Απόδειξη ανισοτήτων με κυρτότητα και Θ.Μ.Τ

611. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Αν $0<\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}>\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}$.

612. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,5]$ με $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι $3f(0)+2f(5)<0$.

613. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Η f δεν παρουσιάζει καμπή

614. Έστω μια συνάρτηση f : R → R για την οποία ισχύει $f''(x)\neq 4f'(x)-4f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{-2x}f(x), x\in\mathbb{R}$, δεν έχει σημεία καμπής.

615. Δίνεται συνάρτηση g, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $g^2(x)+(x-4)g(x)+x^2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g δεν έχει σημεία καμπής.

Γεωμετρικός τόπος σημείων καμπής

616. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2\text{συν}2\alpha+2x\text{συν}^2 2\alpha+\text{ημ}^2 2\alpha$, x,α ∈ $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

617. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2-6e^{x-\alpha}$, $x,\alpha\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου καμπής της C_f, καθώς το α διατρέχει το $\mathbb{R}$.

Θεωρητικές ασκήσεις

618. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$ με $f(x-1)=f(3-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

619. Έστω συνάρτηση f με f' κυρτή στο $\mathbb{R}$. Αν η f' έχει κρίσιμο σημείο στο $A(1,0)$ να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

620. Έστω παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f. Αν η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

621. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$. Αν $f'(1)>0$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Σύνθετες ασκήσεις

622. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3x}{x-2}=1$ και $f(4)=6$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)=6$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x+3$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(2,4)$.

δ) Αν η f είναι κοίλη, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(2,4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

623. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ για την οποία ισχύει:

$f(x)\geq\dfrac{3f(1)+f(3)}{4}$ και $|f''(x)|\leq 2$ για κάθε $x\in[1,4]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=f(3)$

β) $f'(3)=0$

γ) Η f έχει στο διάστημα $(1,4)$ τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία και τουλάχιστον μία πιθανή θέση σημείου καμπής.

δ) $|f'(4)|\leq 2$.

624.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f'(x)=\dfrac{3\cdot 2^x+1}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x$.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία y =3x το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$.

Απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

625.Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-2}{4x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{e^x-e}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$

Απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

626.Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx}{e^x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ell n(1+e^{-x})}{x}$

Απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(\pm\infty)$

627.Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}(x^3\ell nx)$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ell n\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell nx}{e^{\frac{1}{x}}}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0^+}(xe^{\frac{1}{x}})$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0}x\ell nx$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x(e^{\frac{1}{x}}-1)+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ **η)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(e^{\frac{1}{x}}-1)\right]$ **θ)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3\cdot\ln^2 x\right)$

Απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$ ή $(-\infty)-(-\infty)$

628.Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x-x^2\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln 2x\right)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)-x\right]$

629.Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ell nx)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-e^x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ell nx-x^2+x+1)$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-x^2+3x-1)$ **στ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1-3^x\right)$

ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-\ell n(x^2+e^x)\right)$ **η)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ell n(1+2e^x)\right)$ **θ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-\ln x)$

Απροσδιόριστες μορφές $0^0, 1^\infty, \infty^0$

630.Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{x-1}$,x>1 **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

δ) $\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x)^x$ **ε)** $\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)^{\frac{1}{\eta\mu x}}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)^{\frac{1}{x}}$

Ανάλυση ορίου σε βασικά όρια

631.Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0}(e^x-1)\ell nx$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\eta\mu\dfrac{1}{x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to0}(1-e^{-x})\ell nx)$

Εύρεση ορίου από κανόνα De L'Hospital και ορισμό παραγώγου

632.Αν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\alpha x\eta\mu2x-\beta\sigma\upsilon\nu2x-x}{x^2}=\dfrac{9}{2}$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

633.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x+1$, $x>0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $x\ln x\geq x-1$ για κάθε $x>0$**.**

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

634.Δίνεται συνάρτηση f, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

α) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-2h)+f(x+2h)-2f(x)}{4h^2}=f''(x)$

β) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-2h)-2f(x)+f(x+2h)}{h^2}=4f''(x)$

635.Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

α) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-3h)+f(x+3h)-3f(x)}{9h^2}=f''(x)$

β) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-3h)-3f(x)+f(x+3h)}{h^2}=9f''(x)$**.**

Σύνθετες

636. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+f(x)\right]=2$. Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

637. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf'(x)+f(x)\right]=1$. Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$ το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

Ασύμπτωτες

Εύρεση ασυμπτώτων με γνωστή f

638. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3+x}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x+5}$ **γ)** $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{x-2}$

δ) $f(x)=\sqrt{4x^2+3x+1}-2x$ **ε)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **στ)** $f(x)=x\ln x$

ζ) $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$ **η)** $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ **θ)** $f(x)=xe^{-x}$

Απόδειξη πλάγιας ασύμπτωτης με ορισμό

639. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-2}$ έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y=2x-1.

640. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{1+e^x}$. Να δείξετε ότι:

α) Η ευθεία y = x + 1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β) Η ευθεία y = x - 1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

641. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αν η ευθεία $y=\lambda x+\beta$, $\lambda\neq 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lambda$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-xf'(x)\right]=\beta$

Εύρεση ασύμπτωτων από συνθήκη

642. Έστω οι συναρτήσεις : f, g : R→R με g(x) = f(x) + x + xημ$\frac{1}{x}$ για κάθε x≠ 0.

Αν η ευθεία y = 2x + 3 είναι ασύμπτωτη της C_f στο +∞, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο +∞.

643. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις : $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(xe^{-x}), x \in \mathbb{R}$.
Αν η ευθεία y = 2x +1 εφάπτεται της C_f στο x_0=0, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο +∞.

644. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$2x+1 \le f(x) \le \frac{2x^3 + x^2 - 2017}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη .

Εύρεση παραμέτρων

645. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x-2}$, x ≠ 2, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ..Αν η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞ , να βρείτε τα α,β.

646. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\beta x + \alpha}{x^2 + \alpha x + \beta}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f, να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

647. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + \beta x + 3}{x - \gamma}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $x = 2$ και $y = 2$ να είναι ασύμπτωτες της C_f .

648. Η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $-\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 3x]$.

β) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\alpha f(x) + 4x}{xf(x) - 3x^2 + 3x} = 2$.

Εύρεση ορίων από το θεώρημα της πλάγιας ασύμπτωτης

649. Αν η ευθεία y = 4x - 3 είναι ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο -∞, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)f(x)+3x^2-5x+2}{x^2-x}$.

650. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f(x)-g(x)=x-4$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι η ευθεία $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Σύνθετα θέματα

651. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\left|g(x)f(x)+x^2\right|\le x\ln x$ για κάθε $x>1$. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f,g δέχονται πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ τις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

652. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει: $g'(x)=f'(x)+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g τέμνονται επί της ευθείας x=2 και η C_g έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=-x+2$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ασκήσεις στη μελέτη συνάρτησης

653. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις.

α) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ **β)** $f(x)=2x^4-x^2$

654. Ομοίως τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=e^x\left(x^2-2x+2\right)$ **β)** $f(x)=x^2e^{-x}$ **γ)** $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

655. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x+\dfrac{\ell nx}{x}$

α) Να δείξετε ότι ℓnx < x για κάθε x > 0

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

γ) Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_f

δ) Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f και της ευθείας ε: y = 3x.

ε) Να βρείτε σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτόμενη της, να είναι παράλληλη στην ευθεία y = 3x +1.

656.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα,τα διαστήματα στα οποία f η είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία f η είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **α**, **β**, **γ** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ισχυρισμός

Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις f,g στο $[\alpha,\beta]$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot\int_a^\beta g(x)dx = g(x)\cdot\int_a^\beta f(x)dx \text{ »}$$

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Παράγουσες

657. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^3$ **β)** $f(x)=\frac{1}{x^4}, x>0$

γ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ **δ)** $f(x)=x\sqrt{x}$

658. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\eta\mu x-\frac{1}{x^2}+e^{-x}, x>0$ **β)** $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{3}{\sqrt{x}}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

γ) $f(x)=2^x-\frac{1}{\eta\mu^2 x}, \text{x}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

659. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)e^x$ **β)** $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$

γ) $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}$ **δ)** $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$

ε) $f(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$, $x>0$ **στ)** $f(x)=\frac{3x^2-x^3}{e^x}$

660. Να βρείτε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

α) $f'(x)=3\left(x^2+1\right)\left(x^3+3x+5\right)$ και $f(0)=\frac{1}{2}$

β) $f'(x)=\frac{1}{2-x}$, με $x<2$ και $f(1)=-2$

γ) $f'(x)=\frac{x-1}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$, με $x\in(3,+\infty)$ και $f(4)=1$

δ) $f'(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$,με $f(0)=ln2+1$

661. Να βρείτε συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,όταν η C_f δέχεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο της $M(x,f(x))$ με κλίση $\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ και διέρχεται από το σημείο $M(1,e+1)$.

662. Να βρείτε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $f'(x)=8x^3-\frac{5}{x}+2$ και γραφική του παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1,3)$.

663. Δίνεται άρτια και συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η παράγουσα F της f , είναι περιττή συνάρτηση με δεδομένο ότι $F(0)=0$.

664. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.Να βρείτε την αρχική συνάρτηση F της f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $F(0)=0$ και
- $2xF(x)+f(x)=e^{-x^2}$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια , να βρείτε τη συνάρτηση f.

665. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.Να βρείτε την παράγουσα F της f στο $\mathbb{R}$,για την οποία ισχύουν:

- $F(0)=1$ και
- $2f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}F(x)$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

666. Αν $\int_1^5 f(x)dx=2$, $\int_2^5 f(x)dx=3$ και $\int_1^7 f(x)dx=5$,να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_5^2 f(x)dx$ **β)** $\int_5^7 f(x)dx$ **γ)** $\int_1^2 f(x)dx$ **δ)** $\int_2^7 f(x)dx$

667. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\eta\mu x+e^x)\,dx$ **β)** $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\eta\mu^2 x}\right)dx$

γ) $\int_1^2(3^x-\frac{5}{x^2})\,dx$ **δ)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x})\,dx$

668. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 (3x^2 - x - 1)\,dx$ **β)** $\int_0^1 (e^x - \eta\mu(\pi x))\,dx$

γ) $\int_1^2 (2^x + \frac{3x+2}{x^2})\,dx$ **δ)** $\int_1^2 (x - \frac{1}{x})^2\,dx$

669. Αν ισχύει: $\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} \frac{4x^2-3x-5}{x^2+4}dx + \int_{\lambda^2+1}^{\lambda+3} \frac{3x^2-3x-9}{x^2+4}dx = \int_{-1}^{1} 2dx$, να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Εύρεση ολοκληρώματος με παραγοντική ολοκλήρωση

670. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx$ **β)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\eta\mu 2x dx$ **γ)** $\int_0^1 (x^2+1)e^{2x}dx$,

δ) $\int_0^1 \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{-x} dx$ **ε)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2\sigma\upsilon\nu 2x dx$ **στ)** $\int_1^e x^3 \ln x dx$,

ζ) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$ **η)** $\int_1^2 (2x+2)\ln x dx$ **θ)** $\int_1^2 x^3 \ln^2 x dx$

ι) $\int_1^e \ln x dx$ **κ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \cdot e^{2x} dx$

671. Έστω μια συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0, π].Αν g(π) = 1 και ισχύει $\int_0^{\pi} [g(x) + g''(x)]\eta\mu x\,dx = 3$, να βρείτε την g(0).

672. Αν η συνάρτηση f έχει f'' συνεχή στο [0, 1] και είναι $f(0) = 1$, $f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{f''(x) - f(x)}{e^x}dx$

Εύρεση ολοκληρώματος με τη μέθοδο αντικατάστασης

673. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{(1+2\sigma\upsilon\nu x)^2}dx$ **β)** $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **γ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\eta\mu x)^4 \sigma\upsilon\nu x dx$

δ) $7\int_0^2 (x^2-3x)^6(2x-3)dx$ **ε)** $12\int_0^1 (3x+1)^3 dx$ **στ)** $\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x}dx$

674. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$ **β)** $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$ **γ)** $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$

δ) $\int_2^6 \frac{4x+3}{\sqrt{2x+4}}dx$ **ε)** $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$ **στ)** $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$

675. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cdot \eta\mu\sqrt{x}dx$ **β)** $\int_0^{\pi^2} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx$ **γ)** $\int_1^e \frac{\ell nx}{x\cdot\sqrt{1+\ell nx}}dx$

Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων $\mathbf{I=\int_\kappa^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}dx}$

676. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \frac{x-2}{x+3}dx$ **β)** $\int_0^1 \frac{x^2-8}{x-3}dx$ **γ)** $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx$

677. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx$ **β)** $\int_0^1 \frac{4x-1}{2x^2-x+3}dx$ **γ)** $\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x^2-4x+3}dx$

δ) $\int_2^3 \frac{x^3+2x+5}{x^2-1}dx$ **ε)** $\int_{-3}^{-2} \frac{x^3-3}{x^3-x}dx$ **στ)** $\int_2^3 \frac{x^3+2x+5}{x^2-1}dx$

678. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$ **β)** $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}-2}{1+e^x}dx$

γ) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-2}dx$ **δ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x+1}dx$

Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

679. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu^2 x\,dx$ **β)** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$ **γ)** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2 x\,dx$ **ε)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^3 x\,dx$ **στ)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi^3 x+\varepsilon\varphi^5 x)\,dx$

680. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x dx$ **β)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x dx$ **γ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^5 x dx$ **ε)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ **στ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx$

ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$ **η)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x dx$ **θ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx$

681. Με την βοήθεια των τύπων :

- $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)$
- $2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$
- $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 3x\cdot\sigma\upsilon\nu 4x dx$ **β)** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 2x\eta\mu x dx$ **δ)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x dx$

682. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x} dx$ **β)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx$ **γ)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dx$

Ολοκληρώματα συνάρτησης πολλαπλού τύπου

683. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, αν $f(x) = \begin{cases} 4x^3-2x^2+1, & x<0 \\ 2e^x-1 & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

β) $\int_1^{e^2} f(x)dx$, αν $f(x) = |\ln x - 1|$

γ) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, αν $f(x) = \begin{cases} 4\eta\mu^2 x+1 & , \quad x\leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu^2 x & , \quad x>0 \end{cases}$

684. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 \sqrt{x^2-8x+16}dx$ **β)** $\int_0^2 |x-1|dx$ **γ)** $\int_1^3 |x^2-4|dx$

Ολοκλήρωμα αντίστροφης

685. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο [1,10] της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,8) και Β(10,13). Να δείξετε ότι : $\int_1^{10} f(x)dx + \int_8^{13} f^{-1}(x)dx = 122$.

686. Έστω $f(x) = e^x + 2x - 5, x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x)dx$.

687. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x-e^x, x>1$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$.

688. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}, x>1$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να την βρείτε .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_e^{e^2}\dfrac{1}{\ln x}dx+\int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}}dx$.

689. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+2x^3-3,\ \ x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_{-3}^{0} f^{-1}(x)dx$.

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως αριθμός

690. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$\int_0^1 f(x)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dx=2\int_0^1 f(x)dx+3$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$I=\int_0^1 f(x)dx$.

691. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx=f(x)+e^x, x\in\mathbb{R}$.

692. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x f(x)dx=f(x)+\sigma\upsilon\nu x, x\in\mathbb{R}$.

693. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

α) $f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)\,dx$ **β)** $f(x)=x-\int_0^1 e^x f(x)\,dx$

694. Έστω f : [0,1] →R μια συνεχής συνάρτηση ,για την οποία ισχύει

$e^{\int_0^1 f(x)dx}=\int_0^1\left(f(x)+3x^2\right)dx$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$

Εύρεση συνάρτησης –άκρων ολοκληρώματος

695. α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=0$.Να δείξετε ότι $f(x)=0, x\in[\alpha,\beta]$.

β) Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $g(x)\neq 0, x\in\mathbb{R}$.Αν $\int_\alpha^\beta g^2(x)dx=0$,να δείξετε ότι $\alpha=\beta$.

696. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο .Αν $f(0)=1$ και $\int_0^1 (f'(x))^2dx+\int_0^1 f^2(x)dx=f^2(1)-1$,να δείξετε ότι $f(x)=e^x$.

697. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(x)>3x^2$, για κάθε x∈R.
- $\int_\alpha^{\eta\mu\alpha} f(x)dx=\eta\mu^3\alpha-\alpha^3$

Να βρείτε το α.

Συναρτησιακή σχέση και ολοκλήρωμα

698. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει:

α) $f(x)+f(1-x)=2, x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 f(x)\,dx$

β) $f(x-1)+f(2-x)=2, x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 f(x)\,dx$

699. Δίνεται συνάρτηση f περιττή και συνεχής στο διάστημα $[-\alpha,\alpha], \alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$ **β)** $\int_{-1453}^{1453} x^{1821}\sigma\upsilon\nu x dx=0$

700. Δίνεται συνάρτηση f άρτια και συνεχής στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_0^{\alpha} f(x)dx$ **β)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^8\sigma\upsilon\nu x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^8\sigma\upsilon\nu x dx$

701. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει:

$f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c$, $c\in\mathbb{R}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]\frac{\beta-\alpha}{2}=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)$$

702. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,2]\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f(x)+f(2-x)=g(x)+g(2-x)$ για κάθε $x\in[0,2]$. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 g(x)dx$.

703. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $3f(1-x)+f(x+1)=2x^2-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $9\int_{-1}^{1} f(x)dx+3\int_1^3 f(x)dx=10$.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

Ανισότητες

704. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x+1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x^x dx>e-1$

705. α) Να αποδείξετε ότι: $x^2\ln x+2>x$ για κάθε $x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\int_2^4 x^2\ln x dx>2$.

706. Να δείξετε ότι: $12\le\int_0^4\sqrt{x^2+9}\,dx\le 20$.

707. Έστω f : [1,3] →R μια συνεχής συνάρτηση με ελάχιστη τιμή το 2 και μέγιστη τιμή το 4. Να δείξετε ότι : $2\le\int_1^3 f(x)\,dx\cdot\int_1^3\frac{1}{f(x)}dx\le 8$.

708. Έστω f : [0,2] →R μια συνεχής συνάρτηση με ελάχιστη τιμή το -2 και μέγιστη τιμή το 1. Αν $\int_0^2 f(x)dx=0$ Να δείξετε ότι :

α) $\int_0^2 f^2(x)\,dx\le 4$ **β)** $-4\le\int_0^2 xf(x)dx\le 2$

709. Δίνεται συνάρτηση f 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)-f(\alpha)\le f'(\beta)(x-\alpha)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

β) $2\int_\alpha^\beta f(x)dx\le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2f(\alpha)(\beta-\alpha)$.

710. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι: $(\beta-\alpha)f(\alpha)<\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$.

711. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}f(x)dx<\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}f(x)dx$.

Εμβαδά

Υπολογισμός Εμβαδού χωρίου μεταξύ C_f και χ΄χ

712. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

α) $f(x)=x^3-x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$.

β) $f(x)=x^2-8x+12$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=4$.

γ) $f(x)=x^2-2\sqrt{2}x$ και τον άξονα $x'x$.

δ) $f(x)=x\eta\mu x$, τους άξονες και την ευθεία $x=2\pi$.

713. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x'x , τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

α) $f(x)=e^x-x-1$ και την $x=1$ **β)** $f(x)=x^2-x$ και την $x=-1$

714. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}a+\ell nx & ,0<x\le 1\\ 1+\sqrt{x-1} & ,x>1\end{cases}$

α) Να βρείτε το α.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x = $\frac{1}{2}$, x = 2.

715. Έστω F αρχική της $f(x)=e^{x^2}$ με $F(1)=0$.Να βρείτε το εμβαδόν τουχωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F τους άξονες x΄x,y΄y και την $x=2$.

Υπολογισμός Εμβαδού χωρίου μεταξύ C_f και C_g

716. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=\eta\mu x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\frac{\pi}{2}$.

β) $f(x)=\ln x-1$, $g(x)=2x+1$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

γ) $f(x)=(x^2+1)\ln x$, $g(x)=x^3-x^2+x-1$ και την ευθεία $x=2$.

δ) $f(x)=e^x-2x-2$, $g(x)=x^2-e^x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

ε) $f(x)=x^2+2e^{-x}$, $g(x)=2-2\eta\mu x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$.

717. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f''(x)=g''(x)+e^x$, $f'(0)=g'(0)+1$ και $f(0)=g(0)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία $x=1$.

Υπολογισμός Εμβαδού χωρίου μεταξύ C_f, C_g και C_h

718. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x$ και την ευθεία ε: y = 2,

β) f (x) = e^x,g(x)= $f(x)=e^x, g(x)=\frac{e}{x}$ και την ευθεία ε: y = 2.

719. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-\ln x$, τον άξονα $y'y$ και τις ευθείες $y=1$ και $y=-1$.

720. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = ημx.

α) Να βρείτε την εφαπτόμενη ε της C_f στο $x_0=\pi$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ε και τον άξονα y'y.

Εμβαδόν αντίστροφης-Παράμετροι

721. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2007}+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

722. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+3x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

723. Δίνεται συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(x)=\int_0^x \frac{1}{3f^2(t)+1}dt$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες $\chi'\chi$, $y'y$ και την ευθεία $x=2$.

724. Αν το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα y'y και την ευθεία $y=4$, χωρίζεται από την ευθεία $y=\alpha^2, \alpha>0$ σε δύο χωρία ισοδύναμα, να βρείτε την τιμή του α.

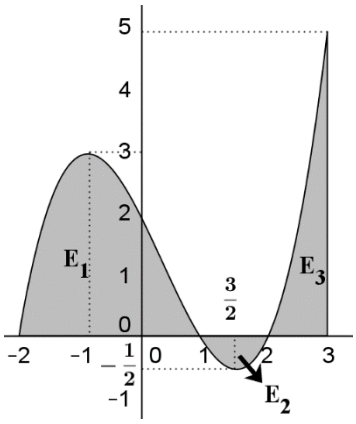
725. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x-x^2$ και του άξονα $\chi'\chi$.

β) Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ορίζει στο προηγούμενο χωρίο δύο άλλα χωρία με λόγο εμβαδών $\frac{E_1}{E_2}=\frac{1}{3}$.

Εμβαδά και μελέτη

726. Δίνεται η συνάρτηση $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο.

Από την γραφική παράσταση της f' η οποία φαίνεται στο διπλανό σχήμα να απαντήσετε τα επόμενα ερωτήματα αν ισχύουν



- $f(-2)=-2$, $f(-1)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}$
- $E_1=6$, $E_2=1$ και $E_3=2$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

δ) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\alpha$

Επαναληπτικά θέματα

Συναρτήσεις

727. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $0<\alpha<\beta$ ισχύει ότι $\ln\frac{\alpha}{\beta}<\beta-\alpha$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\ln x+x)+\ln x=1-x$.

ε) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

728. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $(-1,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $f^3(x)+f(x)=e^x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^3(f(x))+f(f(x))+1=0$.

729. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\geq 0$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $g(g(x))>f(f(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ την ανίσωση: $f(x^2)+f(x^4)>f(x)+f(x^3)$.

730. Δίνονται οι αντιστρέψιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $f^{-1}(g(x)+2)+x=4$ και $g^{-1}(8-2x-f(4-x))-x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+1$ και $g(x)=3-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=-(f\cdot g)(x),\ x\geq 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της h.

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της h βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

731. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda x}{x-2}$, $x\neq 2$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι:

$(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=2$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\neq 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f(x+1)\right)+f(x+1)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}-2}+1$

δ) Δίνεται συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(2,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(g(x)\right)+g(x)=e^x$ για κάθε $x>2$. Να δείξετε ότι

i. η g αντιστρέφεται.

ii. $g^{-1}(x)=2\ln x-\ln(x-2)$

732. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

γ) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να βρείτε συνάρτηση g ορισμένη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι

$e^{f\left(g\left(e^x\right)\right)}+f\left(g\left(e^x\right)\right)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

733. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-2x+9$ και $g(x)=\sqrt{x-8}$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $g\circ f$.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $h(x)=(gof)(x)$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x)=\sqrt{h(x)-1}$.

δ) Αν $F(x+2)=f(x)$, να βρείτε τη συνάρτηση F.

ε) Να βρείτε συνάρτηση t ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g\left(t(x)\right)=x$.

734. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(2,-1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f\left(f^{-1}\left(x^3\right)-3\right)<2$.

δ) Έστω ότι η f είναι περιττή. Να δείξετε ότι:

i. Η C_f διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1,-2)$.

ii. $f(0)=0$.

iii. $\dfrac{f(x)}{e^x-1}<0$ για κάθε $x\neq 0$.

735. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)}+f(x)+x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=-e^x-x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(-e-1,1)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\ln x-e^x-1\right)=x$.

ε) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha<\beta$ είναι $\dfrac{e^\beta-e^\alpha}{\alpha-\beta}<1$.

736. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f\left(f(x)\right)=4x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(1)=1$.

β) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εκφράσετε την f^{-1} συναρτήσει της f.

γ) Αν γνωρίζετε ότι $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να βρείτε τα α,β.

δ) Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(f\circ f\circ g)(x)=4e^x+4x-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $g(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

737. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x)+\ln f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x+\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι $f(1)=1$.

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)+\ln f\left(f\left(3^x+x^3\right)\right)<1$.

738. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(e^x\right)-1\right)=0$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

ε) Αν υπάρχει αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $\left(g^{-1}\circ f\right)(x)=\left(f\circ g^{-1}\right)(x)$.

739. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι η $g\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)-f(x)<x-x^2$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $g\left(g\left(4^x+x\right)\right)-g\left(f(18)+18\right)=0$.

740. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

β) η f είναι περιττή.

γ) Αν $f(x)>0$ για κάθε $x<0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(x+1+e^{x^3}\right)+f\left(x^3-1\right)=f(x+1)$$

741. Δίνεται περιττή και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(A)=\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,-2)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)+f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g αντιστρέφονται και ισχύει: $f^{-1}(x)=g^{-1}\left(f(f(x))+x\right)$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f\left(f(-2)\right)\right)+f(-2)<g\left(g(x)-6\right)$.

742. Δίνεται αντιστρέψιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(f\left(x\right)+y\right)=x+f\left(y\right)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f\left(0\right)=0$.

β) Να δείξετε ότι $f^{-1}\left(x\right)=f\left(x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f\left(x\right)+e^{x}\right)=x+f\left(e-\ln x\right)$.

δ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα ,να δείξετε ότι $f\left(x\right)=x$.

743. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(xy\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$ για κάθε $x,y>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(1\right)=0$.

β) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f\left(x\right),\ x>0$.

γ) $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)$.

Έστω ότι επιπλέον για την f ισχύει ότι $\mathbf{f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{x^{2}}\right)=-\ln x}$ για κάθε $\mathbf{x>0}$.

δ) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=\ln x$.

ε) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$.

744. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\left(0,+\infty\right)$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(0\right)=1$.

β) $f\left(-x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)},\ x\in\mathbb{R}$.

γ) $f\left(x-y\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(y\right)}$.

Έστω ότι επιπλέον για την f ισχύει ότι $\mathbf{f\left(2x\right)+e^{2x}=2e^{x}f\left(x\right)}$ για κάθε $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$.

δ) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=e^{x}$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x}+e^{x^{3}}>e^{x^{2}}+e^{x^{4}}$.

745. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι

$f(x)+f(2x-1)=2g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Έστω ότι για τη συνάρτηση f επιπλέον ισχύει: $2f(x)+f(-x)=x^3+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^3+x$ και $g(x)=\frac{9}{2}x^3-6x^2+\frac{9}{2}x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $(x^3+x)^3+x^3+x-10=0$.

ε) Αν $h^3(x)-e^{3x}=e^x-h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $h(x)=e^x$.

746. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)>x_0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$.

γ) Έστω $g(x)=x-2\sqrt{x}+1$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $(g\circ g)(x)=f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι $f\circ g=g\circ f$ για κάθε $x\geq 0$.

Όρια-συνέχεια

747. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{f(x)}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$x_0+\eta\mu x_0=\sigma\upsilon\nu x_0$.

748. Έστω συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)} + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = e^x + x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

ii. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\ln\left(f^{-1}(x) - x\right) - \ln\left(2^x + 5^x\right)\right]$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^2(x)}{x - e^{f(x)}}$, αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

749. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f αντιστρέφεται.

β) Η εξίσωση υπάρχει μοναδικός $\rho \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho) = 0$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$2f(\xi) = f\left(10^{-10}\right) + f\left(10^{-10^{10}}\right).$$

ε) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left[f(2)\right]^x + \left[f(3)\right]^x}{\left[f(3)\right]^x - \left[f(4)\right]^x}$.

στ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

750. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $e^{x_0} = \alpha - x_0,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - x + 2^x}{f(x) - x + 3^x}$

ii. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{f(x) - e^x} - \sqrt{f(x) - e^x}}{x - 1}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2 - 1\right) + f\left(x^4 - 1\right) > f(x - 1) + f\left(x^3 - 1\right)$.

751. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$e^{f(x)}+f(x)=xe^x+\ln x+x$ για κάθε $x>0$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x+x$.

γ) Να δείξετε ότι $\dfrac{\ln\dfrac{\alpha}{\beta}}{\beta-\alpha}<1$ για κάθε $0<\alpha<\beta$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός x_0 για τον οποίο ισχύει $\ln x_0=\alpha-x_0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

752. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $0\le\alpha<\beta$ ισχύει: $\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\beta}<\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha}$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

753. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

ε) Έστω $g(x)=1-\ln x$.

i. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\left(f^{-1}\circ g\right)(x)$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $1<\alpha<e-1$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1-\ln\alpha}{1-\ln(\alpha+1)}>\dfrac{\ln\alpha}{\ln(\alpha+1)}$.

754. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f(x)>0$

ii. $\ln x+x<e+1$

iii. $\ln f(x)+f(x)>e+1$

γ) Δίνεται συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g(x)+e^{g(x)}-1=f(x)$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι $g(x)=\ln x,\ x>0$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=2\rho-\rho^2$.

755. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}2, & 1\le x<2\\ 2\sqrt{x-1}, & x\ge 2\end{cases}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(f(x))-2}{x-2}$.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,5)$ τέτοιο, ώστε: $f^3(x_0)+f^2(x_0)+3f(x_0)=x_0^3+x_0$.

756. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x+3^x-1, x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2^{x^2-3x}-2^{2x-4}=3^{2x-4}-3^{x^2-3x}$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha,\ \alpha>0$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$.

757. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+\eta\mu^2 x=2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Με δεδομένο ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}$.

γ) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της .

758. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-5}{x}=4$ και

$2\eta\mu(x-1)+10(x-1)^3\le(x-1)f(x)\le 8x^2-14x+6$ για κάθε $x\in(0,1)$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x)=f(x)-\ln x-4$, $x\in(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^{f(x)-4}$ τέμνει την $y=x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\lambda+4}=e^{f(x)}$ στο διάστημα $(0,1)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

759. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)=(x^2-\eta\mu^2 x)^3$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $0\le f(x)\le x^2-\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

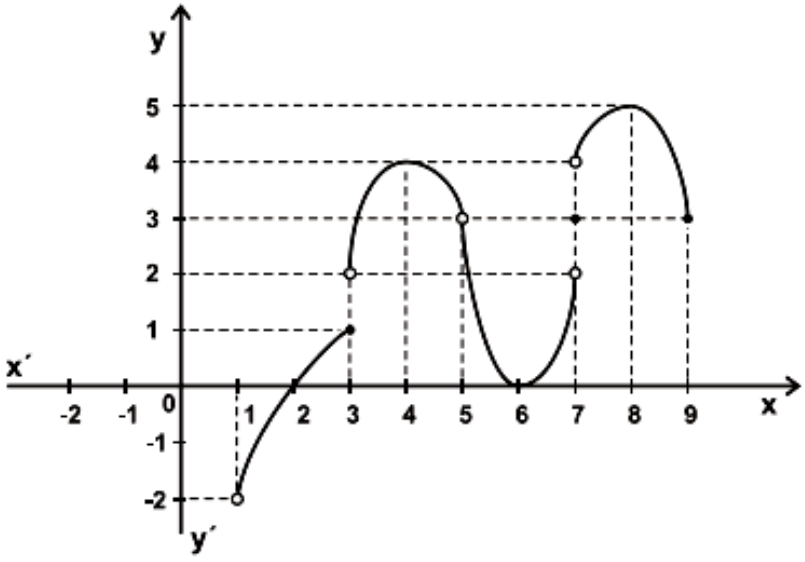
β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

Παράγωγοι

Παράγωγος και Γραφική παράσταση

760.Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ii) $\lim\limits_{x\to 3}\mathrm{f}(\mathrm{x})$ iii) $\lim\limits_{x\to 5}\mathrm{f}(\mathrm{x})$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 7}\mathrm{f}(\mathrm{x})$ **v)** $\lim\limits_{x\to 9}\mathrm{f}(\mathrm{x})$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 8}\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))$

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)=0$
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ρυθμός μεταβολής -Εφαπτομένη

761.Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-\sqrt{2x}}{x-2}=-\dfrac{5}{2}$ και $f(x)=f(x+4)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_1 = 6$.

γ) Να βρείτε τη τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 2$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 2x + 2\lambda$.

δ) Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Ox και Oy αντίστοιχα. Ένα δοκάρι είναι τοποθετημένος κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Το κάτω μέρος του δοκαριού ολισθαίνει πάνω στον ημιάξονα Οχ με ρυθμό 1m/sec.Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή του δοκαριού απέχει από την αρχή των αξόνων 3m, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής

i) της οξείας γωνίας θ που σχηματίζει το δοκάρι με τον x΄x.

ii) την ταχύτητα που πέφτει το πάνω μέρος του δοκαριού.

(Δίνεται ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι ίσο με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ όπου Γ,Δ τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε του προηγούμενου ερωτήματος με τους άξονες)

762.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^7 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 5x - 2$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

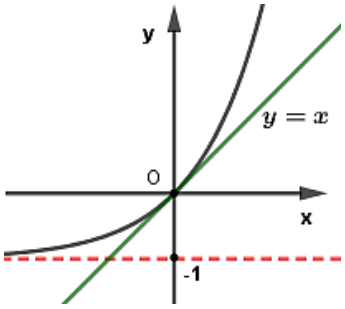
δ) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η ευθεία ε: $y = \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_1 = 3$.

ε) Υλικό σημείο Μ κινείται επί της ε και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 8cm/sec. Να βρείτε:

i. Την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $K(3,1)$.

ii. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το σημείο Μ, τις προβολές του σημείου Μ στους άξονες και την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο Κ.

763. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x+1$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=2018$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$.

δ) Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x f(x)+e^x-f(x)-1}{2x}$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}+f(x)\right)$

στ) Υλικό σημείο Μ κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασής του από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(0,f(0))$.

Θ.Rolle – Θ.Μ.Τ.– Συνέπειες Θ.Μ.Τ

764. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f(1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f' αντιστρέφεται.

β) Η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

δ) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)+(2\xi-1)f(\xi)=0$.

ε) Υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$.

765. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 2\kappa x + \kappa - 1$. Να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 0$.

β) Η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x-2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(x_0 , 2)$.

γ) Αν $\kappa > 1$, τότε υπάρχει $\xi \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)<0$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma)=-2\kappa+8\gamma$

766. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με f(α) = α και f(β) = β. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$.

β) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 3$.

γ) υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{2a+\beta}{3}$.

δ) αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{2}{f'(x_2)} = 3$.

767. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$.

α) Έστω ότι $6xf(x) \neq (3x^2 - 12) f'(x)$, για κάθε $x \in [-2,2]$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(2) f(-2) \neq 0$.

ii. Η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2,2)$.

β) Έστω ότι $(3x^2 - 12) f'(x) - 6xf(x) = (3x^2 - 7)(3x^2 - 12)^2$ για κάθε $x \in (-2,2)$ και $f(0) = -48$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) = 3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48$, $x \in [-2,2]$.

ii. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2,2)$.

768. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln f(x)$. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha < \beta < \gamma$ και οι $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$

β) Υπάρχει $\xi \in$ R, ώστε να ισχύει: $f(\xi) \cdot f''(\xi) = (f'(\xi))^2$.

Μονοτονία - Άκρότατα

769. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x-2\eta\mu x+\beta, & x<0\\ 1, & x=0\\ \alpha\eta\mu x-\beta x+1, & x>0\end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

Έστω $\alpha=\beta=1$.

β) Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi,\pi]$, όμως υπάρχει σημείο της C_f στο διάστημα αυτό που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος αυτού.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1\in(-\pi,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

δ) Να βρείτε διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq(-\pi,\pi)$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0>0$ τέτοιο, ώστε $\eta\mu x_0=x_0-2017$.

770. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-1}+x^2-3x+1$ και $g(x)=\ln x-x+1$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f,g.

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1}-\ln x+x^2-2x=0$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα x΄x.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $3e^{x-1}+3x+x^3=3x\ln x+3x^2+4$.

771. Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m , το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά μήκους x m ,κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

α) να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα ,είναι $\mathrm{E}(\mathrm{x})=\dfrac{(\pi+4)\mathrm{x}^2-64\mathrm{x}+256}{16\pi},\mathrm{x}\in(0,8)$.

β) να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται ,όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m,ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 .

Κυρτότητα-Σημεία καμπής

772. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ για την οποία ισχύει:

$f(x) \geq \frac{3f(1)+f(3)}{4}$ και $|f''(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in [1,4]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = f(3)$

β) $f'(3) = 0$

γ) Η f έχει στο διάστημα $(1,4)$ τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία και τουλάχιστον μία πιθανή θέση σημείου καμπής.

δ) $|f'(4)| \leq 2$.

773. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε x>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $(x^2-1) f(x) \geq \frac{2x - 2x^2}{e}$
- $\left(\frac{1}{x}-1\right) f(x) - (\ln x - x) f'(x) = (x - \ln x) \cdot |f(x)|$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x), x > 0$, x>0, τότε:

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[(f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

γ) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι

i) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) η συνάρτηση f είναι κοίλη στο (0,1).

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $f(x) + f(3x) < 2f(2x)$, για κάθε $x \in (0,1)$

δ) Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta \in (0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\beta) + f(3\beta) = 2f(\xi)$.

774. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + x + \alpha$ και $g(x) = \frac{x \ln x}{x + \alpha}$, $\alpha > 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα ρ

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) \geq -\frac{\rho}{\alpha}$ για κάθε $x > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha(x\ln x-\lambda)=\lambda x$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

775. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

776. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ,x<0\\ \ln\left(e^x+x\right), & x\geq 0\end{cases}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια:

i) στο πεδίο ορισμού της.

ii) στο διάστημα $[0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$.

ε) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$, η εξίσωση $\frac{e^{f(x)}-f(x)}{x}+\frac{f(x)}{x-\alpha}=0\ (1)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,\alpha)$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x^2}-1\right)+f\left(|x|-|\eta\mu x|\right)=0$.

ζ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

777. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+2x$ και η ευθεία ε που εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στα σημεία της $A\left(x_1,f(x_1)\right)$ και $B\left(x_2,f(x_2)\right)$ με $x_1\neq x_2$.

α) Να βρείτε τα σημεία Α , Β και την εξίσωση της ευθείας ε.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία ε.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in (-2,-1)$, στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ακρότατο.

Ασύμπτωτες- De l Hospital

778. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) i) Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$,έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi) < \frac{-\sqrt{2}+1}{3}.$$

779. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (\alpha+1)^x - \alpha^x$, $\alpha > 1$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f , για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

δ) Να λύσετε το σύστημα $3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19$.

780. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \ln x}{x-1} & , 0 < x \neq 1 \\ \alpha & , x = 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και η εξίσωση $f^{-1}(x-1) = x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ και ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

στ) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f'(x)+1<f(x)<\dfrac{x+1}{2}$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

781. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1)=0$ και
- $2\sqrt{1-x}\cdot f'(x)=1+\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x}$ για κάθε $x\in(0,1)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}, x\in(0,1]$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) το όριο $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f^{-1}(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $M(x_0,f(x_0))$ με $x_0\in(0,1)$

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

782. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f.

δ) με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα ,να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Ολοκληρώματα

783. Έστω $f:[0,1]\to R$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f'(0)=f'(1)=0$
- $f(0)=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2+x$

α) Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g στα σημεία της με τετμημένες $x_1=0$ και $x_2=1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3=\frac{1}{2}$ τότε να αποδείξετε ότι:

i) $g(1)=0$

ii) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi)+2\xi=1$

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 f(x_0)dx=\int_0^1(1-x)f'(x)dx$

ii) Υπάρχει $x_0\in[0,1]$], ώστε $f'(x_0)=2\int_0^1 f(x)dx$

784. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(x)>0$ και $g(x)>0$
- $f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}$
- $g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$
- $\int_{f(0)}^{g(0)}\left(f^2(t)+g^2(t)+e^{2t}\right)dt=0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=g(0)$, να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.

δ) Αν $f(x)\cdot h(x)=(3x^2+2x)\int_0^2 f(t)h(t)dt-44$ να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης h.

Ανισοτικές σχέσεις

785. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2+11\right)-\ln\left(x^2+1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-3,3)$ τέτοιο, ώστε $\left|f'(x_0)\right|>\frac{1}{6}\ln\frac{6}{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $2\le\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}e^{f(x)}dx\le 11$.

δ) Να αποδείξετε ότι ο άξονας x΄x είναι ασύμπτωτη της C_f.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\ln\left(x^2+x+4\right)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2,1)$.

786. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f^5(x)+4f(x)=5x$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

β) $f(0)=0$ και $f(1)=1$

γ) $\int_0^1\left(f(x)+f^{-1}(x)\right)dx=1$

δ) $\mathrm{f}(x)>\mathrm{x}$ για κάθε $x\in(0,1)$

ε) $\int_0^1 f(x)dx>\frac{1}{2}$.

787. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 f(t)dt<\frac{2e^4}{17}$, για κάθε $x>0$.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_1^e f(\ln x)\cdot\frac{\ln x}{x^2}dx$.

788. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

Η f' είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, $f(1)=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(1+5h)-f'(1-h)}{h}=0$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$, $x>1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

γ) Αν G αρχική της g στο $(1,+\infty)$ τότε:

i) Να λύσετε την ανίσωση $G(8x^2+6)-G(8x^2+5)>G(2x^4+6)-G(2x^4+5)$

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha-1)(G(x)-G(\alpha))=(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$, $\alpha>1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,+\infty)$.

789. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 1 και τα μόνα κοινά σημεία της με τον άξονα x΄x έχουν τετμημένες -2 και 4. Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $f\left(-\dfrac{7}{4}\right)$ και τη μονοτονία της f στο διάστημα $[0,+\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(-0,1)x^3+f(1)x^2+f(2)}{f(-1)f(5)x^2+f(0)}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)+f(e^{3x})=f(e^{2x})+f(e^{4x})$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(-2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\sqrt[4]{f^3(-0,1)\cdot f(2)}$

ε) Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,4)$ ισχύει $(f(x)-1)f''(x)<0$ να αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x)dx<2$.

790. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=0$
- $x^2f'(x)+1=4\int_1^e f(x)dx-xf(x)$, για κάθε $x>0$.

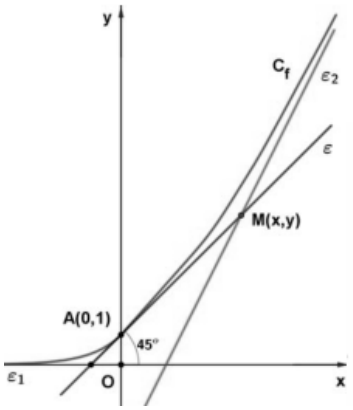
α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, για κάθε $x>0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le x-1$, για κάθε $x>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1\dfrac{f(2x+3)-x}{e^x}dx<3-\dfrac{4}{e}$.

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και $g(x)=-x^2$ αντιστοίχως έχουν μια τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

791. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας και κυρτής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή παράγωγο.
Η γραφική παράσταση C_f της f έχει ασύμπτωτες τις ευθείες: $\varepsilon_1: y=0$ στο $-\infty$ και την $\varepsilon_2: y=2x-3$ στο $+\infty$.
Η ευθεία ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°.



α) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=...$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=...$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=...$ **iv)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=...$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$ **ii)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln f(x)}{f(x)-2x-1}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1}, θεωρώντας ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

ε) Να αποδείξετε ότι :

i) Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση $y=x+1$ και να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

ii) $\int_0^5 f(x)dx>18$.

792. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2, x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα σημείο καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

δ) Αν $\alpha = 2$,να αποδείξετε ότι $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$.

Εύρεση τύπου συνάρτησης

793.Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

β) Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$.

γ) Αν για την συνάρτηση f του ερωτήματος Α και τη συνάρτηση g του ρωτήματος

β) ισχύει ότι: $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και

$g(0) = g'(0) = 1$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

ii) να αποδείξετε ότι η g είναι 1 – 1.

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

794.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + \beta x + 1}{x - 1}$.

α) Να βρείτε τα α, β ώστε η C_f να έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία ε: y = x.

Για α = 1 και β = -1.

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f, τα ακρότατα και τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 1) + f(x^4 + 1) = 6$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f ,την ε τον άξονα y'y και την ευθεία x = -1.

795.Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν**:**

- $f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in R$

β) i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{|f(x)|}-1\right)\ln|f(x)|\right]$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt}{x-3}+\dfrac{2016\cdot\int_2^3 f^2(t)dt}{x-2}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

796. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\lambda x-2, \lambda>1, x>0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le(1-\lambda)x-3$ για κάθε x>0.

ε) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο Α και την ευθεία $x=\lambda$.

i) Να αποδείξετε ότι $E(\lambda)=\dfrac{1}{2}\left(\lambda^2-1-2\lambda\ln\lambda\right)$

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

797. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ell nx}{2\sqrt{x}}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το α ,ώστε $f(a+1)+f(e^a)=2$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα χ΄χ και των ευθειών x = 1, x = λ, λ>0.

δ) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{\lambda\to0}E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

798. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2}{e^x+2}$.

α) Να δείξετε ότι: $|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$ για κάθε x∈R .

β) Να δείξετε ότι για όλα τα α, β ∈ R ισχύει : $|f(\beta)-f(a)|\le\dfrac{1}{2}|\beta-\alpha|$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f τους άξονες χ΄χ , y'y και την ευθεία $\chi = \lambda$, $\lambda > 0$.

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

799. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) + x^2 = 2x$ για κάθε $x \in [0,2]$ και $f(1) = 1$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (0,2).

γ) Να βρείτε την f.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τους άξονες χ΄χ, y΄y και τη ευθεία $x = 1$.

ε) Για κάθε $x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

800. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x \ , x > 0 \\ 0 \quad\ , x = 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες χ΄χ , y΄y και την ευθεία $x = 1$.

801. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

- $f(x) \neq x$,
- $f'(x) = \dfrac{f(x)}{f(x) - x}$
- $\int_3^{f(0)} \left(f(t) - t \right) dt = 0$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 3$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι

i) $\sqrt{x^2+9}\cdot f'(x)-f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\alpha(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$,τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες x=0 και x=1.

802. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:
$f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$ για κάθε $x>0$.

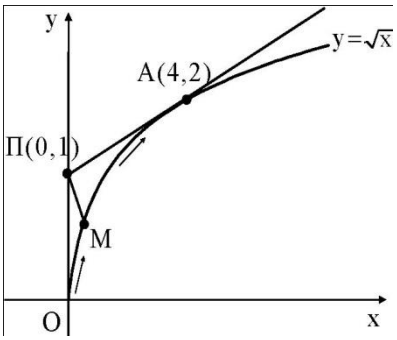
γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=2018$.

δ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_2^3\dfrac{f(t)}{t}dt<\int_3^4\dfrac{f(t)}{t}dt$.

στ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία $x=1$, να δείξετε ότι $\dfrac{1}{4}<E<\dfrac{1}{2}f(1)<\dfrac{1}{2}$.

803. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ είναι $x'(t)=16$ m/min.



α) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t)=16t$

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση $d = (ΠΜ)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

Επαναληπτικές 2011

804. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = e$.

2012

805. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $-\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

δ) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ(x), τον άξονα x΄x και την ευθεία x = 1.

2014

806. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, $A = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε $e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Για τα ερωτήματα β και γ, δίνεται ότι $f^{-1}(x)=e^x\left(x^2-2x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x=1$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x,f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x),x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

2014

807. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)=2xf(x)+9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\sqrt{x^2+9}=\lambda-x,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $x+\sqrt{x^2+9}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)^2+9}<9$.

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$.

στ) Υλικό σημείο $M(x,y)$, $x>0$ κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1cm/sec. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο $A(4,9)$.

ζ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

η) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=4$.

θ) Θεωρούμε τα σημεία $A\left(x,f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x),x\right)$, $x>0$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα. Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

ι) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f\left(x^2\right)}{f^2(x)-\eta\mu^2 f(x)}$.

808. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι: $(f')^2(x)-e^{2x^2}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(0)=1=f(1)$ και $f(0)=0$

α) Να δείξετε ότι $f'(x)=e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)dx < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x)dx$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2018$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\text{συν}(\xi-1)\cdot f(\xi)+\text{ημ}(\xi-1)\cdot f'(\xi)=1-2\xi$.

809. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(f'(x))^2+1=e^{2x}+2f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f'(0)=2f(0)=2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{e^x+x}+e^x=1-x$.

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_0=1$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράστασης της f^{-1},την εφαπτομένη της στο $x_0=1$ και την ευθεία $x=\dfrac{1-e}{e}$.

810. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{f(x)-x^5-x^3-x}$.

Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f'(0)=1$.

Επίσης αν η συνάρτηση f είναι περιττή έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

β) $f(0)=0$

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^5+x^3+x$

δ) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

ε) Να δείξετε η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της .

στ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των $C_f, C_{f^{-1}}$

ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1},τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x=0, x=3$.

811. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{e}{x}+x, x>0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

β) i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(2e-f(x)\right)>e$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x-(ex+1)\left(\frac{e}{x}-\frac{1}{e}\right)=2$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right), x>0$.

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική της παράσταση, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1, x=e$.

ii) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\le\alpha$ για κάθε $x>0$, τότε $\frac{\alpha}{2}+e\ge 1$.

812. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε:

- $2f^2(1)+f^2(3)\le 2f(1)\cdot f(3)$
- $f'(1)=2$
- $f''(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση 1-1

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο στο R

γ) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi x)}{(x-1)\left(f(x)-2x+2\right)}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x)dx<\int_1^3 f(x)dx$.

ε) Να αποδείξετε ότι $E<(\xi-1)^2$, όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$ και $x=\xi$ με ξ το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

813. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:(-e,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)}=\frac{1}{f'(x)}$, για κάθε $x\in(-e,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(x+e), x\in(-e,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-x\right)$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και τους ημιάξονες Ox΄ και Oy.

ε) Να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό α, αν ισχύει $e^{f(x)}+2e^{x}-x\alpha\geq e+2$ για κάθε $x>-e$.

στ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln\left(x+e\right)}{\ln\left(x^2+e\right)}dx>\frac{1}{2}$.

814.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^4-2x^2+2x$ και η ευθεία ε που εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f στα σημεία της $A\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ και $B\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ με $x_1\neq x_2$.

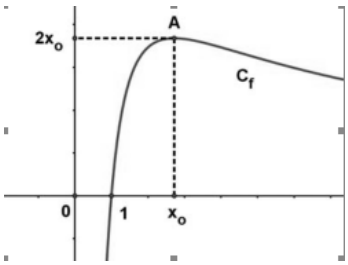
α) Να βρείτε τα σημεία A , B και την εξίσωση της ευθείας ε.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία ε.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x\in\left(-2,-1\right)$, στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ακρότατο.

815.Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:



- Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$.
- Παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x_0 με τιμή $f\left(x_0\right)=2x_0$ για κάθε $x\in\left(0,x_0\right]$.
- Έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο την ευθεία $y=0$.

α) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{f\left(x\right)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+f\left(x\right)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-2x}{\left(x-x_0\right)f\left(x\right)}$

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $0<\frac{2x_0}{x_0-1}<f'\left(1\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in\left(1,x_0\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν $E(\Omega)$ το εμβαδό του επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα xx και την ευθεία $x=x_0$, να αποδείξετε ότι: $E\left(\Omega\right)<2x_0\left(x_0-1\right)$.

Γενική άσκηση τριγωνομετρίας από το σχολικό βιβλίο

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $K(x)=\begin{cases} f(x), & x\le\pi \\ \alpha x+\beta, & x>\pi \end{cases}$, όπου $f(x)=\eta\mu x$.

1) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=\pi$.

2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $K(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,\pi)$.

3) Να αποδείξετε ότι $K(x)>x-\frac{1}{6}x^3$ για κάθε $x>0$.

4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $K(x)=x-1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$. Να γίνει αντιπροσωπευτικό σχήμα.

5) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{K^2(x)}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

6) i. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $O(0,0)$ και $\Gamma(\pi,0)$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις εφαπτομένες του προηγούμενου ερωτήματος.

7) i. Να αποδείξετε ότι $K(x)>x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

8) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\varepsilon\varphi x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

9) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{x}{2}\right)=x$ αληθεύει μόνο για $x=0$.

10) Δίνεται η συνάρτηση $t(x)=(x-1)f(x)$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $t'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ii. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x=1-x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

11) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f(x)}dx$.

12) i. Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u=\pi-x$ για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\pi}xh(f(x))dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}h(f(x))dx$$

ii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{xf(x)}{3+f^2(x)}dx$

13) Δίνεται η συνάρτηση $H(x)=\begin{cases} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση Η είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και η γραφική της παράσταση εφάπτεται στον άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων.

ii. Η C_H έχει άπειρα κοινά σημεία με τον άξονα x΄x.

iii. Η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_H.

Η λογαριθμική συνάρτηση στο σχολικό βιβλίο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x,\ x>0$.

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(1-x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1}+\frac{f(x)}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της $y=\frac{1}{x}$ ακριβώς σ΄ ένα σημείο.

4.Έστω Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,f(x))$, με $x>1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Τ, όταν $x=5$ cm.

5. Αν $0<\alpha<\beta$, να δείξετε ότι $1-\frac{\alpha}{\beta}<\ln\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}-1$.

6. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-1$ και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\varphi(x)=2xf(x)+x^2-4x+3$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $a(x)=x\ln x$ και $b(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

7. Δίνεται η συνάρτηση $d(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)}{1-x}, & 0<x\neq 1\\ -1\ , & x=1\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η d είναι συνεχής.

β) $d'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $A(x)=\begin{cases}0 & , x=0\\ (1-e^{-x})f(x), & x\in(0,1]\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

9. α) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $B(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}$ για κάθε $\alpha>e$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x=x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις στο $(0,+\infty)$, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

10. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e f(x)dx=\int_e^1 f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$.

11. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν, $E(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , $k(x)=\dfrac{e}{x}$, τον άξονα των x και την ευθεία $x=\lambda$, $\lambda>e$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

12. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ και την ευθεία $y=\ln 2$.

13. α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $w(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Η εκθετική συνάρτηση στο σχολικό βιβλίο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $a(x)=f(-x)+1$ και $b(x)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$ αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους.

2.Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τη γραφική παράσταση της $y=\dfrac{1}{x}$ ακριβώς σ΄ ένα σημείο.

4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $c(x)=-x^2-x$.

5. Αν μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)g(x)-e^{\alpha}g(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)\big(g(\alpha)+g'(\alpha)\big)\ .$$

6. Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha}(\beta-\alpha)<e^{\beta}-e^{\alpha}<e^{\beta}(\beta-\alpha)$.

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

α) $f(x)>x+1$ **β)** $f(x)>\dfrac{x^2}{2}+x+1$

8. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=2f(x-\alpha)-x^2$ έχει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στη παραβολή $y=-x^2+2$.

9. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha, & x\le 0\\ f(\beta x), & x>0\end{cases}$, να είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=0$.

10.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $A(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ (1-f(-x))\ln x, & x\in(0,1]\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

11. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή, ενώ η $d(x)=\ln x$ είναι κοίλη.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και της C_d στο $B(1,0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι: **i.** $e^x\ge x+1,\ x\in\mathbb{R}$ **ii.** $\ln x\le x-1,\ x\in(0,+\infty)$.
Πότε ισχύουν οι ισότητες;

δ) Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

12. α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $B(x)=f(x)-\lambda x,\ \lambda>0$.

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει $f(x)\ge\lambda x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για τη τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ εφάπτεται στη C_f .

13. Ο πληθυσμός $N(t)$, σε εκατομμύρια, μιας κοινωνίας βακτηριδίων, αυξάνεται με ρυθμό $N'(t)=\frac{1}{20}f\left(\frac{t}{20}\right)$ ανά λεπτό. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά.

14. Η θερμοκρασία Τ ενός σώματος, που περιβάλλεται από ένα ψυκτικό υγρό, ελαττώνεται με ρυθμό $-\kappa\alpha f(-kt)$, όπου α, κ είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Η αρχική θερμοκρασία $T(0)$ του σώματος είναι $T_0+\alpha$, όπου T_0 η θερμοκρασία του υγρού η οποία με κατάλληλο μηχάνημα διατηρείται σταθερή. Να βρείτε τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t.

15. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\Gamma(x)=f\left(-x^2\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι:

α) $1-x^2\le f\left(-x^2\right)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$ και

β) $\frac{2}{3}\le\int_0^1 f\left(-x^2\right)dx\le 1$.

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ στο σχολικό βιβλίο

1. Έστω $g(x)=x-2f(x)+1$. Να αποδείξετε ότι $g(g(x))=x$ για κάθε $x\in[0,1]$.

2.Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός P της πόλης είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N=10f\left(2\left(x^2+x\right)\right)$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $f(t)+4$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

α) Να εκφράσετε τον αριθμό Ν των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του t.

β) Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα.;

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-f(x)}{9-x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f\left(1-x^2\right)}{x^2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x+2)-2}{f\left(x^2+5\right)-3}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-2}{x^2-5x+4}$

ε) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{xf(x)+f(x)-2}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{f\left(x^2+10x+25\right)}{x+5}$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-f(x)}{f(x)-1}$

η) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{-9}{xf(x)-2x-4f(x)+4}$ **θ)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f\left(x^2+1\right)+5-x}{x+f\left(4+3x^2\right)}$

4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(\xi,f(\xi)\right)$ και $B(-\xi,0)$ εφάπτεται της C_f στο Α.

5. Έστω $h(x)=2f(x)+x-3$.

α) Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)+x=3$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=1$.

6.α) Να βρείτε το σημείο Μ της C_f που απέχει από το σημείο $A\left(\frac{9}{2},0\right)$ τη μικρότερη απόσταση.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

7. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=f\left(x^2+2x+2\right)$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: y=-x-1$ και $\varepsilon_2: y=x+1$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ε_1 είναι ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$, ενώ η ε_2 είναι ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+2x+2>(x+1)^2\geq 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_φ βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

8. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $B(x)=f\left(x^2+1\right)-x$.

9. Να βρείτε τη συνάρτηση t, με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει $t'(x)=\frac{1}{f(x)}$ και $t(9)=1$.

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $a(x)=f(x-1)$ και $b(x)=\frac{x+1}{3}$.

11.α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της ε στο σημείο $\Gamma(1,1)$ και τον άξονα x΄x.

β) Να βρείτε ευθεία $x=\alpha$ η οποία χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου σκέλους σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Διαγώνισμα προσομοίωσης
στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου
2017-18

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,\ x_0)\cup(x_0,\ \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Να *γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας:*

Για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι :

α) η εξίσωση $(\beta-\alpha)f'(x)=f(\beta)-f(\alpha)$ έχει λύση στο (α,β) .

β) η εξίσωση $(\beta-\alpha)f'(x)=f(\beta)-f(\alpha)$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β) .

γ) υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x .

δ) $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ αρκεί να ισχύει $f(a)=f(\beta)$.

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Τα κρίσιμα σημεία μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f είναι πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

μονάδες 1

β) Με την βοήθεια συνάρτησης που να ικανοποιεί την υπόθεση του ισχυρισμού, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α) .

μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθ**ούν, γράφοντας στο τετράδιό σας** την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η παράγωγος της δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η παράγωγος της f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της $-|f|$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(\mathrm{A},f(\beta)]$ όπου $\mathrm{A}=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$ και υπάρχει $x_0\in[\alpha,\ \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)<0$, τότε το εμβαδόν του χωρίου **Ω** που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

ε) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$.

μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln(x-2)-1, g(x)=\sqrt{1-x}$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και ο τύπος της συνάρτησης $f\circ g$

Β2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g αντιστρέφονται (1 μονάδα) και στη συνέχεια να βρείτε τα πεδία ορισμού των αντίστροφων τους συναρτήσεων (3 μονάδες) και τους τύπους τους (4 μονάδες).

Αν $f^{-1}(x)=e^{\frac{x+1}{2}}+2, x\in\mathbb{R}$ και $g^{-1}(x)=1-x^2, x\geq 0$:

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)$ και **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(g^{-1}(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{g^{-1}(x)}\right)$

Β4. Να υπολογίσετε το $\int_0^1\left(f^{-1}(2x-1)-2\right)\cdot\left(1-g^{-1}(x)\right)dx$

μονάδες 5+8+6+6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει :

- $f^2(x)=|x|$.
- $f(1)=f(-1)=1$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{|x|}, x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα και την κυρτότητα .

Γ3. Να δείξετε η γραφική παράστασης της f τέμνει την ευθεία $y=2018$ σε δύο ακριβώς σημεία.

Γ4.α) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,την εφαπτομένη της f στο $x_0=1$,τον άξονα y΄y και την $x=1$.

β) Αν το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,την εφαπτομένη της f στο $x_0=1$,τον άξονα y΄y και την $x=4a^2, 0<a<\dfrac{1}{2}$ είναι ίσο με $2\alpha^3$, να βρείτε το α και το εμβαδόν E_1.

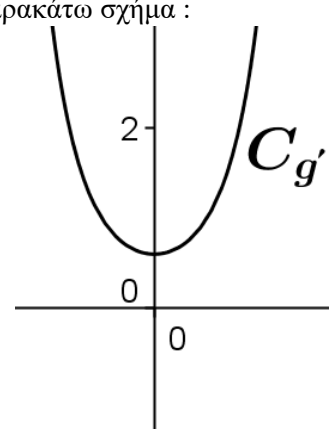
μονάδες 5+5+5+5+5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

- $f'(x) - f(x) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 2$

Επίσης δίνεται συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{2x} + e^{x}$.

μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \left(f(x) - e^{2x} \right) \cdot 2^x \, dx$

μονάδες 6

Δ3. α) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$

β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x^2) \, dx > 3$

μονάδες 1+3+3

Δ4. Αν G αρχική της g με $G(1) = \frac{e^2 + e}{2} \cdot G(0)$, να δείξετε ότι :

α) $g(\alpha) < \int_{\alpha}^{\alpha+1} g(x) \, dx < g(\alpha + 1)$,για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β) υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) g(x_0) - f'(x_0) G(x_0) = 0$.

μονάδες 3+3

14ο Λύκειο Περιστερίου
Διαγώνισμα προσομοίωσης
Δεκέμβριος 2018

Θέμα Α

Α 1.Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$;

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

β) Αν $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ με τη προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε $f(x)\leq g(x)$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)=\gamma$ και $f(x)\neq\beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x))=\gamma$.

ε) Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\pm\infty$

μονάδες 5x2

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+3}{x-\alpha}$, $x\neq\alpha$.

Β1. Να δείξετε ότι $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\neq\alpha$.

μονάδες 6

Β2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

μονάδες 4

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\left(\sqrt{f^2(x)+1}-f(x)\right)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\eta\mu\dfrac{1}{x-\alpha}}{f(x)}$

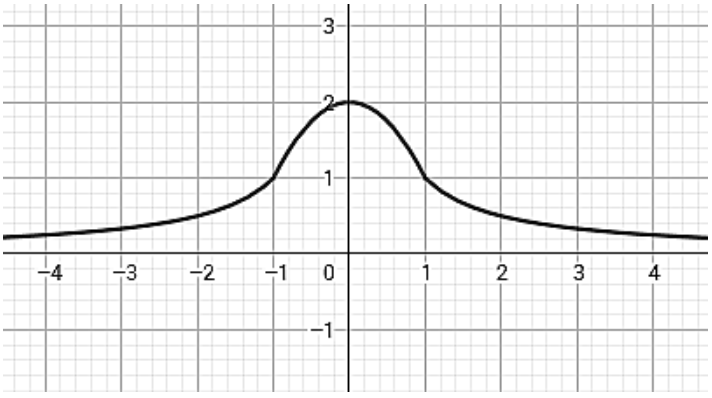
μονάδες 4+4

Β4. Έστω $\alpha=1$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

μονάδες 7

Θέμα Γ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^3(x)+f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 6$.

μονάδες 3+3

Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{f(x)+3}-2}{f^2(x)-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-3}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left|f^2(x)-8\right|-4}{f^3(x)-8}$

μονάδες 9

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)+f(x)=8x$ έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

μονάδες 5

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x^4)-f^3(x^2)<f(x^2)-f(x^4)$.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

μονάδες 3

Δ2. Να βρείτε ακέραιο α για τον οποίο η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(\alpha,\alpha+1)$ (μονάδες 4).

Η ρίζα είναι πιο κοντά στο α ή στο $\alpha+1$; (μονάδες 3)

μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f^5(x)+2f(x)=36$.

μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^4-2x^2+5x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

μονάδες 5

Δ5.Να δείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει $f(g(x))+g(f(x))=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 4

Διαγώνισμα προσομοίωσης στα
Μαθηματικά προσανατολισμού
2018-2019

Θέμα Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$, δηλαδή $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\ln\alpha$.

μονάδες 7

Α2. Πότε το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x)<0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση; (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f\left(x_0\right)\right)=0$, $x_0\in A_f$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

β) Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x)=\pm\infty$.

γ) Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ δεν υπάρχουν, τότε δεν υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο (α,β), τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

μονάδες 5x2

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\le 0 \\ \beta x-x^2+1, & x>0 \end{cases}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο $[-1,1]$.

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=1$ *και* $\beta=0$.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Β3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Β4. Υλικό σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ x>0$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

μονάδες 6+8+6+5

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2-x^2-2\sigma\upsilon\nu x+\alpha x$ και $g(x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1-\alpha x$, ορισμένες στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και για τις οποίες ισχύει ότι $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha=0$.

μονάδες 5

Γ2. α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση g .

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ σε δύο ακριβώς σημεία .

μονάδες 3+3

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{g(x)}$.

μονάδες 4

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=-\frac{\pi}{2}$ *και* $x=\frac{\pi}{2}$.

μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=(1-\xi)g'(\xi)$.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε διάστημα της μορφής $(\alpha,\alpha+1)$, $\alpha\in\mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε να υπάρχει μοναδικό $x_0\in(\alpha,\alpha+1)$ για το οποίο να ισχύει $x_0e^{x_0}+x_0=e^{x_0}$. Το x_0 είναι πιο κοντά στο α ή στο α+1;

μονάδες 3+3

Δ3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες και την ευθεία $x=1$ είναι $E(\Omega)=\ln\dfrac{\left(e^{x_0}+1\right)^2}{2(e+1)}-x_0^2+\dfrac{1}{2}$.

μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι $\dfrac{e^{x+1}}{e^{x+1}+1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}\le\dfrac{1}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 6

Δ5. Να λυθεί η ανίσωση $f'\left(2x^2+1\right)-f\left(x^4+1\right)>f'\left(x^4+1\right)-f\left(2x^2+1\right)$

μονάδες 5

14ο Λύκειο Περιστερίου
Διαγώνισμα προσομοίωσης
Δεκέμβριος 2019

Θέμα Α

Α1.Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ ή -1».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση; (Μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή
Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0.

β) Έστω η «1-1» συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ για κάθε $x \in A$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

δ) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

ε) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\beta x}, & x<0\\ 2, & x=0\\ \beta\sigma\upsilon\nu x+\beta, & x>0\end{cases}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ και

$g(x)=\begin{cases}x^5-\dfrac{\eta\mu 2x}{x}, & x<0\\ x^5-1-\sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0\end{cases}$.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, να δείξετε ότι:

Β1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}, & x<0\\ \sigma\upsilon\nu x+1, & x\geq 0\end{cases}$

Μονάδες 6

Β2. ορίζεται η συνάρτηση $h(x)=(f+g)(x)$ και ότι έχει τύπο $h(x)=x^5$.

Μονάδες 6

Β3. η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

Μονάδες 1+6

Β4. υπάρχει $\gamma\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)=3-h(\gamma)$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x,\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{-x}\left(e^{-2x}+3x^2\right)<x\left(3e^{-2x}+x^2\right)+1$

Μονάδες 6

Γ3. Έστω συνάρτηση g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι
$e^{-g(x)}-e^{-x(2-x)}=g(x)-x(2-x)$ για κάθε $x\in[0,2]$.
Να δείξετε ότι $g(x)=x(2-x)$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με την Α γωνία ορθή την πλευρά $(AB)=\sqrt{g(x)}$ και την $(A\Gamma)=x$ με $x\in(0,2)$ να υπολογίσετε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu B$, $\lim\limits_{x\to 2}\varepsilon\varphi B$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)}{2E(x)}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{-g(x)}+\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{-g(x)}-\sqrt{x^2-5x}}$,

όπου $P(x)$ η περίμετρος και $E(x)$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 2+2+3+4

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=e^{-x}-3x^3-1$ και
$f(x)=\eta\mu g(x)-e^{-x}+3x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε το $g^{-1}\left(\frac{1}{e}-4\right)$.

Μονάδες 1+3

Δ2. Να βρείτε τη ρίζα και το πρόσημο της g.

Μονάδες 1+3

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 4

Δ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{f(x)}+3^{f(x)}-5}{3^{f(x)}+5^{f(x)}}$.

Μονάδες 4

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g^2(x_0)+4g(x_0)=5-5x_0$ (μονάδες 5). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0)>0$ (μονάδες 2).

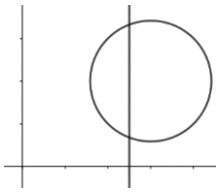
Μονάδες 7

Παραδείγματα-Αντιπαραδείγματα

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. α) Αληθής

β) Ο κύκλος



2. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ e^x, & x>1 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι για $x\le 1$ είναι $f(x)g(x)=(x+2)\cdot 0=0$ και για $x>1$, είναι $f(x)g(x)=0\cdot e^x=0$, δηλαδή $f(x)g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ χωρίς όμως κάποια από τις συναρτήσεις f, g να είναι ίση με το 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} 2, & x\le 1 \\ -2, & x>1 \end{cases}$ και $g(x)=2,\ x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε οι f,g δεν είναι ίσες ούτε αντίθετες για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όμως $f^2(x)=g^2(x)=4,\ x\in\mathbb{R}$.

Παρατήρηση: Αντί για $f^2(x)=g^2(x)$, αν ισχύει $|f(x)|=|g(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το αντιπαράδειγμα είναι ίδιο.

4. α) Ψευδής

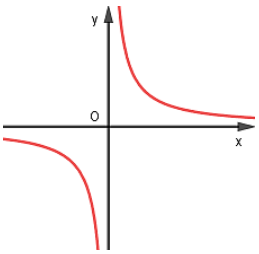
β) Έστω $f(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2+1$ και

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x+1)^2=x^2+2x+1$.

Είναι φανερό ότι $f\circ g\ne g\circ f$.

5. α) Ψευδής



β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$ αφού για $x_1<0<x_2$ είναι $f(x_1)<0<f(x_2)$.

6. α) Ψευδής

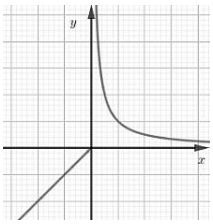
β) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστο, το y = 1, σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi + \pi/2,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ και ελάχιστο, το y = −1, σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi - \pi/2,\ \kappa\in\mathbb{Z}$, αφού $-1\le \eta\mu x\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

7. α) Αληθής

β) Οι συναρτήσεις $f(x)=x,\ g(x)=x^3$ δεν έχουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

8. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.



9. α) Ψευδής

β) Είναι $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ για κάθε $x\in A$ και $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x\in f(A)$.

Επειδή τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f^{-1}\circ f$ και $f\circ f^{-1}$ δεν είναι πάντα ίσα, είναι $f^{-1}\circ f\ne f\circ f^{-1}$**.**

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

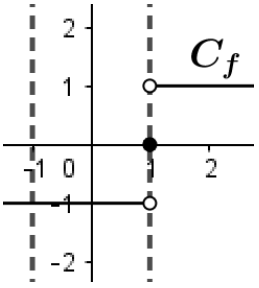
- έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$
- έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και
- αντιστοιχίζει κάθε $y\in(0,+\infty)$ στο μοναδικό $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\alpha^x=y$.

Επειδή όμως $\alpha^x=y\Leftrightarrow x=\log_\alpha y$ θα είναι $f^{-1}(y)=\log_\alpha y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x,\ 0<\alpha\ne 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$. Συνεπώς

$$\log_\alpha \alpha^x=x,\ x\in\mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad \alpha^{\log_\alpha x}=x,\ x\in(0,+\infty)$$

ΟΡΙΟ

1. α) Αληθής.



β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$.Για να βρούμε το όριο της στο $x_0=0$ περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x)=-\dfrac{x-1}{x-1}=-1$.

Το όριο της είναι ίσο με -1 και δεν εξαρτάται από τα άκρα -1,1.

2. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=|\mathrm{x}|,\ \mathrm{x}\neq 0$. Είναι $\mathrm{f}(\mathrm{x})>0$ για κάθε $\mathrm{x}\neq 0$, όμως $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$.

3. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\mathrm{f}(\mathrm{x})=-\mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}\neq 0$ και $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}\neq 0$.
Είναι $\mathrm{f}(\mathrm{x})<\mathrm{g}(\mathrm{x})$ για κάθε $\mathrm{x}\neq 0$, όμως $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\mathrm{f}(\mathrm{x})=0=\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\mathrm{g}(\mathrm{x})$.

4. α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{x}},\mathrm{x}>0\\ \dfrac{-1}{\mathrm{x}},\mathrm{x}<0\end{cases}$ και $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}-\dfrac{1}{\mathrm{x}},\mathrm{x}>0\\ \dfrac{2}{\mathrm{x}},\mathrm{x}<0\end{cases}$. Είναι

$\mathrm{A_f}=\mathbb{R}=\mathrm{A_g}$ και $\mathrm{A_{f+g}}=\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^-}\mathrm{f}(\mathrm{x})=+\infty=\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^+}\mathrm{f}(\mathrm{x}),\ \lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^-}\mathrm{g}(\mathrm{x})=-\infty=\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^+}\mathrm{g}(\mathrm{x})$, οπότε
$\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\mathrm{f}(\mathrm{x})=+\infty,\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\mathrm{g}(\mathrm{x})=-\infty$.

Έχουμε $(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x})=\begin{cases}0,\mathrm{x}>0\\ \dfrac{1}{\mathrm{x}},\mathrm{x}<0\end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^-}(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x})=0\neq\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^+}(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x})=-\infty$

άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})+\mathrm{g}(\mathrm{x})\right)$.

5. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=x,\ f(x)=x+1$ και $h(x)=x+2$

Για κάθε $x\in(-2,1)\cup(1,2)$ είναι $g(x)\le f(x)\le h(x)$,

$\lim\limits_{x\to1}g(x)=1\neq\lim\limits_{x\to1}h(x)=3$ όμως $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$ δηλαδή υπάρχει το όριο της f όταν το x τείνει στο 1 χωρίς να ισχύει το Κριτήριο παρεμβολής.

6. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}2,\ x\le0\\ x,\ x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x,\ x\le0\\ 2,\ x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0,$ δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0^+}g(x)=2,$ δηλαδή δεν υπάρχει ούτε το $\lim\limits_{x\to0}g(x)$.Όμως $f(x)+g(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to0}(x+2)=2$.

7. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=\begin{cases}0,\ x>0\\ 5,\ x\le0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}7,\ x>0\\ 0,\ x\le0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=5$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=0,$ $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=7$ δηλαδή δεν υπάρχει ούτε το $\lim\limits_{x\to0}g(x)$, όμως $f(x)g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big)=0$.

8. α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x>0\\ \dfrac{-1}{x},x<0\end{cases}$ και $f(x)=\begin{cases}x,x>0\\ 2x,x<0\end{cases}$. Είναι

$A_f=\mathbb{R}=A_g$ και $A_{f+g}=\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\ \lim\limits_{x\to0^-}g(x)=0=\lim\limits_{x\to0^+}g(x),$ οπότε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$.

Έχουμε $(f\cdot g)(x)=\begin{cases}1,x>0\\ -2,x<0\end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^-}(f\cdot g)(x)=1\neq\lim\limits_{x\to0^+}(f\cdot g)(x)=-2$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$.

9. α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}-1, & x<x_0\\ 1, & x\geq x_0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}1, & x<x_0\\ -1, & x\geq x_0\end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν στο $x_0\in\mathbb{R}$,

όμως $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}-1, & x<x_0\\ -1, & x\geq x_0\end{cases}$, δηλαδή $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x_0\in\mathbb{R}$.

10. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & x<x_0\\ -1, & x\geq x_0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ όμως $|f(x)|=1,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$.

11. α) Αληθής

β) Από τις ιδιότητες απολύτων ισχύει ότι $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-|f(x)|\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

12. α) Αληθής

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|\Leftrightarrow-\sqrt{f^2(x)}\leq f(x)\leq\sqrt{f^2(x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{0}=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-\sqrt{f^2(x)}\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

13. α) Ψευδής

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

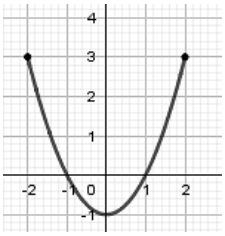
14. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=-\frac{1}{x^4}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ όμως

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^4}=-\infty$$

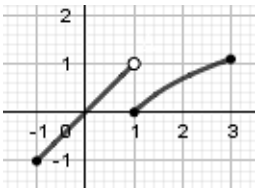
ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. α) Ψευδής



β) Έστω $f(x)=x^2-1,\ x\in[-2,2]$. Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες τις -1, 1 στο $(-2,2)$ όμως $f(-2)=3, f(2)=3$ και $f(-2)f(2)>0$

2. α) Ψευδής



β) Έστω $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x<1 \\ \ln x, & 1\le x\le 3 \end{cases}$. Για $x\in[-1,1)$ είναι

$f(x)=0\Leftrightarrow x=0$, ενώ για $x\in[1,3]$ είναι

$f(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$, δηλαδή η $f(x)=0$

έχει δύο ρίζες και $f(-1)=-1, f(3)=\ln 3$ δηλαδή $f(-1)f(3)<0$,

όμως η f δεν είναι συνεχής στο $[-1,3]$ αφού δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$.

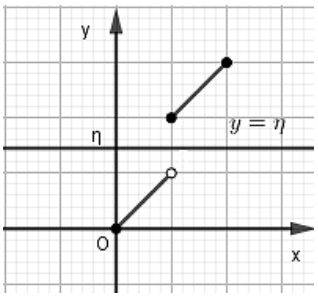
3. α) Ψευδής

β) Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση ,η οποία είναι συνεχής συνάρτηση , έχει σύνολο τιμών μονοσύνολο και όχι διάστημα.

4. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ x+1, & 1\le x<2 \end{cases}$.

Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, επειδή η f δεν είναι συνεχής, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

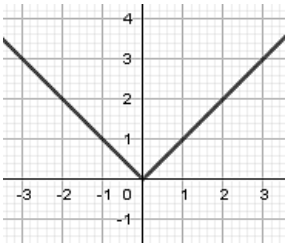


5. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $A=\mathbb{R}^*$ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, όμως $f(x)<0$ για κάθε $x<0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, δηλαδή η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. α) Ψευδής.



β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$.
Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$, ενώ
$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$.

2. α) Αληθής.

β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο x_0 τότε βάση του θεωρήματος θα ήταν και συνεχής στο σημείο αυτό που δεν ισχύει.

3. α) Ψευδής

β) Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $g(x)=x$ και $f(x)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x}, x\geq 0$, τότε έχουμε:
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με τύπο $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

4. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=1-|x|,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=|x|$. Οι f,g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ αφού
$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1$ και

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

Είναι $(f+g)(x)=1-|x|+|x|=1$ και $(f+g)'(x)=0$.

5. α) Ψευδής

β) Στη συνάρτηση $f(x)=x^2,\ x\in[-1,2]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,2]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$ με $f'(x)=2x$, είναι $f'(0)=0$ όμως $f(-1)=1, f(2)=4$ δηλαδή $f(-1)\neq f(2)$.

6. α) Αληθής

β) Αν ήταν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε λόγω του θεωρήματος Rolle θα υπήρχε $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

ή

Στη συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in[-1,1]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,1]$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f'(x)=1\neq 0$ και $f(-1)=-1,\ f(1)=1$.

7. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1 & ,\ x<0\\ 1 & ,\ x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

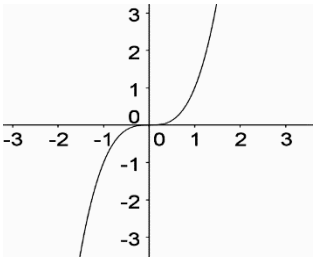
8. α) Αληθής

β) $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x,\ c\in\mathbb{R}$.

9. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$.

Είναι $f'(x)=3x^2$, και $f'(0)=0$, Δηλαδή, βλέποντας το σχήμα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, χωρίς να είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.



10. α) Ψευδής

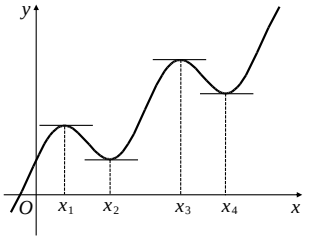
β) Η συνάρτηση $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ αφού $f(x)\geq 0=f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και δεν ορίζεται το $f'(0)$.

11. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ έχει $f'(0)=0$ όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

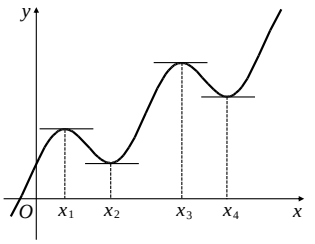
12. α) Ψευδής

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία έχει τοπικά μέγιστα στα x_1, x_3 , όμως δεν παρουσιάζει ολικά μέγιστη τιμή.



13. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Παρατηρούμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_4 και το τοπικό μέγιστο είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο.

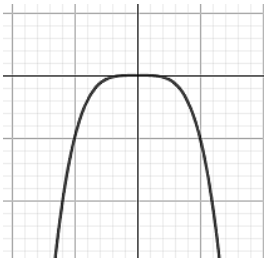


14. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $g(x)=x^4$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x)=12x^2$.
Η εξίσωση $g''(x)=0$ έχει ρίζα το 0.
Όμως το σημείο $(0,g(0))$ δεν είναι σημείο καμπής αφού η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

15. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=-x^4$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f''(x)=-12x^2$ και η f είναι κοίλη, όμως δεν είναι αρνητική στο 0 αφού $f''(0)=0$.



Όμοια

« Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ».

α) Ψευδής

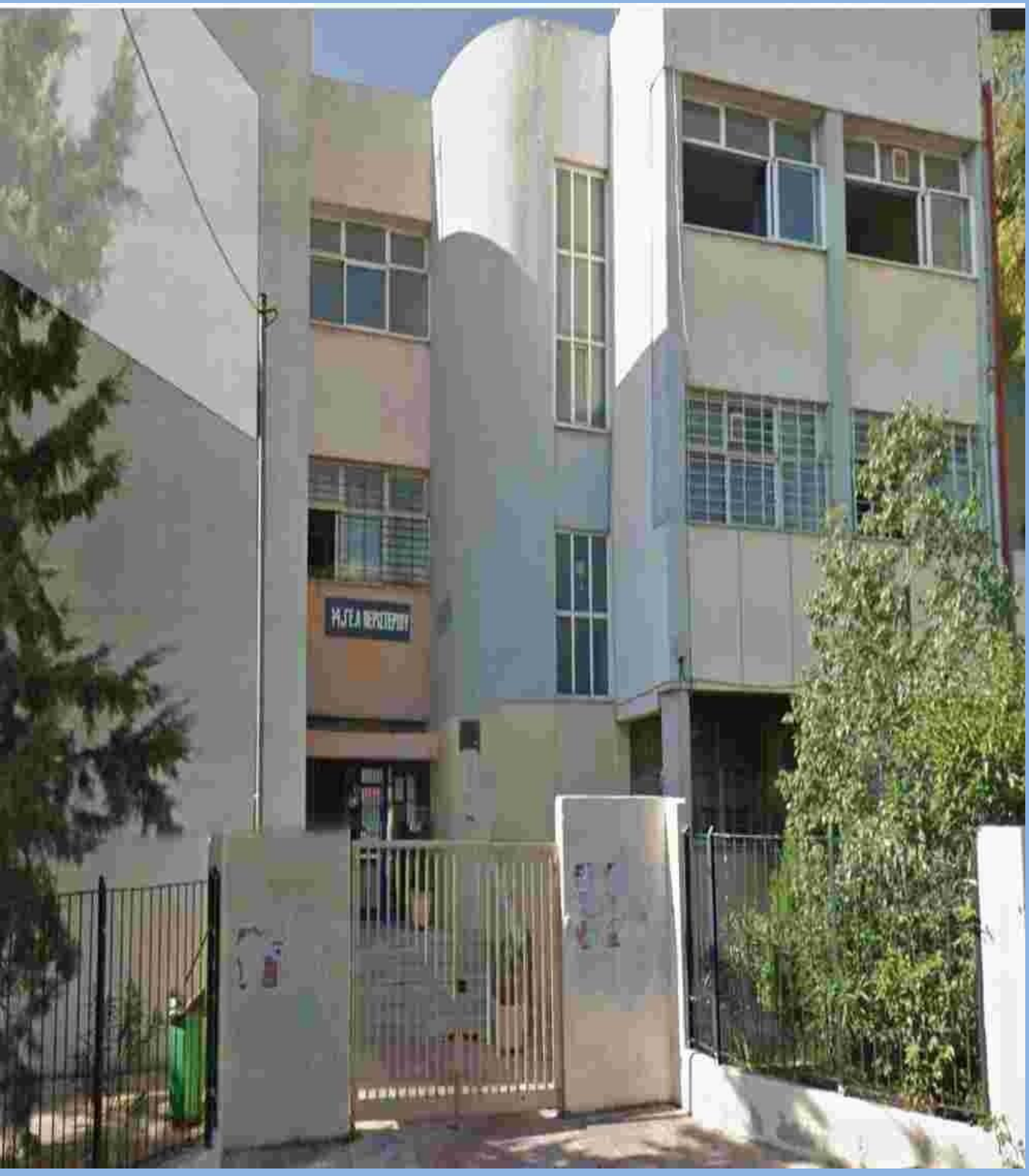
β) $f\left(x\right)=x^4$ ……

16. α) Αληθής

β) Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ και $f''(x)=6\alpha x+2\beta$. Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $-\frac{\beta}{3\alpha}$ οπότε έχει σημείο καμπής το $\left(-\frac{\beta}{3\alpha},f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)\right)$.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

α) Αληθής

β) Ισχύει όταν f,g σταθερές συναρτήσεις.