Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών

Ύλη: Όρια-Κανόνες Παραγώγισης

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι :

Η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

Μονάδες 7

Α2. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Μονάδες 6

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνεχή συνάρτηση σ' ένα σημείο x_0 ισχύει ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta)$ όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

γ) Η $f(x)=\alpha^x, 0<\alpha<1$ f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο αρνητική.

δ) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{g^2(x_0)}{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}$.

Μονάδες 8

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι συνεχείς στο $x_0=0$,για τις οποίες ισχύει :

- $xf(x)=\eta\mu^2 x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$
- $|g(x)-\eta\mu x|\le x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Να δείξετε ότι

Β1. $f(0)=0$.

Μονάδες 6

Β2. η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(0)=1$.

Μονάδες 6

Β3. η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(0)=1$.

Μονάδες 6

Β4. α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)}{h}=2$

www.askisopolis.gr

β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)+g(-h)}{h}=1$

Μονάδες 3+4

Θέμα Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f,g για τις οποίες δίνεται ότι :

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-x^{2020}+x}{\eta\mu x}=2$
- $f^4(x)-2g(x)f^3(x)+2x^2f^2(x)-2g^3(x)f(x)+\sigma\upsilon\nu x^4=x^5-x^4+1$
- το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha\in\mathbb{R}$

Γ1.α) Να δείξετε ότι $g(0)=0$

β) Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(0)=1$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xg\left(\dfrac{1}{x}\right)+e^x\cdot\eta\mu g(x)\right]$

Μονάδες 2+6+5

Γ2.α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^4(x)-2g(x)f^3(x)+2x^2f^2(x)-2g^3(x)f(x)+\sigma\upsilon\nu x^4}{\eta\mu x-2}$

Μονάδες 6+6

Θέμα Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ότι

- $f(1)=4f(4)$
- $\dfrac{f^2(1)+2}{4}=f^2(2)$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(x+1)f(x+1)-xf(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στο $(1,3]$.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε η εξίσωση $-x^2f^2(x)+(x+1)^2f^2(x+1)-x=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,x_0)$.

Μονάδες 7

Δ3. Αν $f(1)=4$,να δείξετε ότι η εξίσωση $l(x)=17$,όπου $l(x)=x^2f^2(x)$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(1,4)$.

Μονάδες 6

Έστω συνεχής συνάρτηση h για την οποία ισχύει $h^3(x)+f(1)\cdot h^2(x)+f^2(2)\cdot h(x)=-x^3+x+4$.

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,2)$.

Μονάδες 6

Καλή Επιτυχία!

Δημήτρης Πατσιμάς

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων
www.askisopolis.gr