## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ (1)

**ΘΕΜΑ 1ο**

*Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x)<0$ στο πεδίο ορισμού της.

**β.** Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο $x_0$ και ισχύει $f(x)\le g(x)$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

**γ.** $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mu x^{\kappa} - 3x^2 + x - 1}{\nu x^{\kappa} - 6x + 1} = \dfrac{\mu}{\nu}, \kappa \in \mathbb{N}^*$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς μ,ν.

**δ.** Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $[\alpha,\beta), \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και $f(a)=a$, τότε $\lim_{x\to a^+} f(x) = a$.

**ε.** Αν $\lim_{x\to x_0} f^2(x) = 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

**Μονάδες 5×2**

Β. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

**β)** Να βρείτε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν) και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

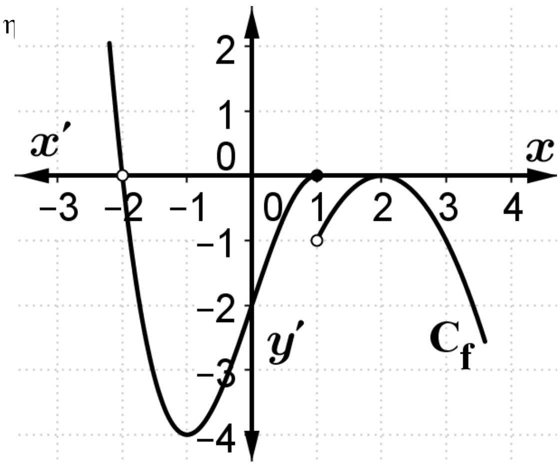
**i)** $\lim_{x\to -2} f(x)$

**ii)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

**iii)** $\lim_{x\to -1} f(x)$

**iv)** $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$

**v)** $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)}$




**Μονάδες 10+20**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2017} - x$ .

**α)** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**β)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to-\infty} \left[ \left(\sqrt{x^2+2017} - x\right) \eta\mu \dfrac{2017}{f(x)} \right]$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2017} - x\right) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{f(x)}$.

**δ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} \left[ \left(\sqrt{x^2+2017} + x\right) \eta\mu f(x) \right]$.

**Μονάδες 10+10+10+10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Αν $(x^2-1) f(x) \le \sigma\upsilon\nu(x+1) - 1$ και υπάρχει το $\lim_{x\to-1} f(x)$, να βρείτε το $\lim_{x\to-1} f(x)$.

**Μονάδες 20**

**Λύσεις**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α.** ΛΣΛΛΣ

**Β. α)** $A_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ , $f(A) = \mathbb{R}$.

**β) i)** $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$ επειδή $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0$

**ii)** δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$

**iii)** $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -4$ επειδή $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -4$

**iv)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο 2.

**v)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

**ΘΕΜΑ 2ο**

**α)** $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2017} - x\right) = \lim_{x\to -\infty}(-x)\left(\sqrt{1+\cancel{\frac{2017}{x^2}}^{\,0}} + 1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2017} - x\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\cancel{x^2}+2017-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2017}+x} = \lim_{x\to +\infty}\cancel{\frac{2017}{x}}^{\,0}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cancel{\frac{2017}{x^2}}^{\,0}}+1} = 0$$

**β)** $$\lim_{x\to -\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+2017} - x\right)\eta\mu\frac{2017}{f(x)}\right] = \lim_{x\to -\infty}\left(f(x)\,\eta\mu\frac{2017}{f(x)}\right) \underset{x\to -\infty \Rightarrow u\to 0^-}{\overset{u=\frac{1}{f(x)}}{=}}$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu 2017u}{u} = 2017\cdot\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu 2017u}{2017u} = 2017\cdot 1 = 2017$$

$$\left(\lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu 2017u}{2017u} \underset{u\to 0^- \Rightarrow h\to 0^-}{\overset{h=2017u}{=}} \lim_{h\to 0^-}\frac{\eta\mu h}{h} = 1\right).$$

**γ)** $$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2017} - x\right)\cdot\eta\mu\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to +\infty} f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)} = 0 .$$

$$\left(\left|f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right| \le |f(x)| \Leftrightarrow -f(x) \le f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)} \le f(x)\right.$$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(-f(x)) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\left.\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} = 0\right)$

$$\left(\sqrt{x^2+2017} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \ge 0 \Leftrightarrow f(x) > 0\right)$$

**δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+2017}+x\right)\eta\mu f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+2017-x^2}{\sqrt{x^2+2017}+x}\eta\mu f(x)\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2017\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right]\underset{x\to+\infty\Rightarrow u\to 0}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{u\to 0}2017\frac{\eta\mu u}{u}=2017.$$

## ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=a$.

$\left(x^2-1\right)f(x)\le\sigma\upsilon\nu(x+1)-1$ **(1)**

Για $x<-1$ : $\left(x^2-1\right)f(x)\le\sigma\upsilon\nu(x+1)-1\Leftrightarrow f(x)\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{x^2-1}$ οπότε

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)\le\lim_{x\to-1^-}\frac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{x^2-1}\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^-}f(x)\le\lim_{x\to-1^-}\frac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{(x-1)(x+1)}\Leftrightarrow$$

$a\le\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x-1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{x+1}\Leftrightarrow a\le-\dfrac{1}{2}\cdot0\Leftrightarrow a\le0.$ **(2)** $\left(\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{x+1}\underset{x\to-1^-\Rightarrow u\to0^-}{\overset{u=x+1}{=}}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0\right)$

Για $-1<x<0$ : $\left(x^2-1\right)f(x)\le\sigma\upsilon\nu(x+1)-1\Leftrightarrow f(x)\ge\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{x^2-1}$ οπότε

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)\ge\lim_{x\to-1^+}\frac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{x^2-1}\Leftrightarrow\lim_{x\to-1^+}f(x)\ge\lim_{x\to-1^+}\frac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{(x-1)(x+1)}\Leftrightarrow$$

$a\ge\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x-1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{x+1}\Leftrightarrow a\ge-\dfrac{1}{2}\cdot0\Leftrightarrow a\ge0.$ **(3)** $\left(\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x+1)-1}{x+1}\underset{x\to-1^+\Rightarrow u\to0^+}{\overset{u=x+1}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0\right)$

$(2),(3)\Rightarrow\alpha=0$ .

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ (2)

### ΘΕΜΑ 1ο

*Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Αν $f(x)<0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ στο πεδίο ορισμού της.

**β.** Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(x)\le g(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

**γ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x^{\kappa}-3x^2+x-1}{x^{\kappa}-x^2+1}=3, \kappa,\mu\in\mathbb{N}^*, \kappa<2$.

**δ.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f^2(x)}=+\infty$.

**ε.** Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $[\alpha,\beta), \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=a$, τότε $f(a)=a$.

**Μονάδες 5×2**

Β. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

**β)** Να βρείτε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν) και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

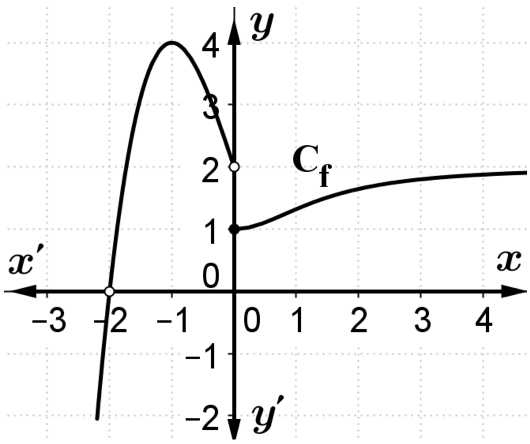
**i)** $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

**ii)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

**iii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}$

**iv)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{f(x)}$

**v)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-2}$




**Μονάδες 10+20**

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2+2017}$.

**α)** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**β)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2+2017}\right)\eta\mu\dfrac{2017}{f(x)}\right]$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2017}\right)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$.

**δ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(x-\sqrt{x^2+2017}\right)\eta\mu f(x)\right]$.

**Μονάδες 10+10+10+10**

### ΘΕΜΑ 3ο

Αν $\left(x^2+3x+2\right)f(x)\le \sigma\upsilon\nu(3x+6)-1$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$.

**Μονάδες 20**

## Λύσεις

### ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** ΛΣΣΣΛ

**Β. α)** $A_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ , $f(A) = (-\infty, 4]$.

**β) i)** $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$ επειδή $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0$

**ii)** δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

**iii)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

**iv)** $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty, \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$ και η f αλλάζει πρόσημο κοντά στο 2.

**v)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)-2} = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ και $f(x) < 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 < 0$ κοντά στο $+\infty$.

### ΘΕΜΑ 2ο

**α)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \sqrt{x^2+2017}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \cancel{\dfrac{2017}{x^2}}^{\,0}}\right) = +\infty$ .

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(x + \sqrt{x^2 + 2017}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2017}{\sqrt{x^2+2017} - x} = \lim_{x\to -\infty} \cancel{\frac{2017}{x}}^{\,0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \cancel{\dfrac{2017}{x^2}}^{\,0}} + 1} = 0 .$$

**β)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x + \sqrt{x^2+2017}\right)\text{ημ}\dfrac{2017}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)\,\text{ημ}\dfrac{2017}{f(x)}\right) \underset{x\to+\infty \Rightarrow u\to 0^+}{\overset{u=\frac{1}{f(x)}}{=}}$

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{\text{ημ}2017u}{u} = 2017 \cdot \lim_{u\to 0^+} \frac{\text{ημ}2017u}{2017u} = 2017 \cdot 1 = 2017 .$$

$$\left(\lim_{u\to 0^+} \frac{\eta\mu 2017u}{2017u} \underset{u\to 0^+ \Rightarrow h\to 0^+}{\overset{h=2017u}{=}} \lim_{h\to 0^+} \frac{\eta\mu h}{h} = 1\right) .$$

**γ)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x + \sqrt{x^2+2017}\right) \cdot \text{ημ}\dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\,\text{ημ}\dfrac{1}{f(x)} = 0$ .

$$\left(\left|f(x)\,\text{ημ}\frac{1}{f(x)}\right| \le |f(x)| \Leftrightarrow -f(x) \le f(x)\,\text{ημ}\frac{1}{f(x)} \le f(x)\right.$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}=0\Big)$

$\left(x+\sqrt{x^2+2017}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0\Leftrightarrow f(x)>0\right)$

**δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(x-\sqrt{x^2+2017}\right)\eta\mu f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^2-x^2-2017}{x+\sqrt{x^2+2017}}\eta\mu f(x)\right]=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(-2017)\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right]\underset{x\to-\infty\Rightarrow u\to 0}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim\limits_{u\to 0}(-2017)\dfrac{\eta\mu u}{u}=-2017.$

## ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=a$ **.**

$\left(x^2+3x+2\right)f(x)\leq\sigma\upsilon\nu(3x+6)-1$ **(1)**

Για $x<-2$ : $\left(x^2+3x+2\right)f(x)\leq\sigma\upsilon\nu(3x+6)-1\Leftrightarrow f(x)\leq\dfrac{\sigma\upsilon\nu(3x+6)-1}{x^2+3x+2}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)\leq\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(3x+6)-1}{x^2+3x+2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)\leq\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3(x+2)-1}{(x+2)(x+1)}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)\leq\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3}{x+1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3(x+2)-1}{3(x+2)}\Leftrightarrow a\leq(-3)\cdot 0\Leftrightarrow a\leq 0$ **(2)**

$\left(\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3(x+2)-1}{x+2}\underset{x\to-2^-\Rightarrow u\to 0^-}{\overset{u=3(x+2)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0\right)$

Για $-2<x<-1$ : $\left(x^2+3x+2\right)f(x)\leq\sigma\upsilon\nu(3x+6)-1\Leftrightarrow f(x)\geq\dfrac{\sigma\upsilon\nu(3x+6)-1}{x^2+3x+2}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(3x+6)-1}{x^2+3x+2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3(x+2)-1}{(x+2)(x+1)}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3}{x+1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3(x+2)-1}{3(x+2)}\Leftrightarrow a\geq(-3)\cdot 0\Leftrightarrow a\geq 0$ **(3)**

$\left(\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3(x+2)-1}{x+2}\underset{x\to-2^+\Rightarrow u\to 0^+}{\overset{u=3(x+2)}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0\right)$

$(2),(3)\Rightarrow\alpha=0$ .