ΠΑΛΙΟ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α). (Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ και $f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

γ) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 6

Απαντήσεις

Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και

$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$,τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

Α3. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α4. α) Ψευδής
β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f''(x)=12x^2$ και $f''(0)=0$.
Η f είναι κυρτή, όμως $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α5.α) Λ β) Λ γ) Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x+\alpha)^2-1,\ x\in[-1,+\infty),\ \alpha\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.
Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ είναι ίση με 2, τότε :
Β1. Να αποδείξετε ότι α = 1.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1} .

Μονάδες 8

Αν $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1,\ x\in[-1,+\infty)$, τότε:
Β3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

Μονάδες 6

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f^{-1}(x)+1}{(f^{-1}\circ g)(x)}$, όπου $(f^{-1}\circ g)(x)=|x|-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Απαντήσεις

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-1,+\infty)$ με $f'(x)=2(x+\alpha)$. Επειδή η κλίση της C_f στο σημείο $xo=0$ ισούται με 2 είναι: $f'(0)=2\Leftrightarrow 2\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=1$.

Β2. Ισχύει $f(x)=(x+1)^2-1$, $x\geq -1$ και έχει παράγωγο $f'(x)=2(x+1)$, $x\geq -1$
Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1, δηλαδή αντιστρέφεται:
1ος τρόπος:
Στο $(-1,+\infty)$ είναι $f'(x)=2(x+1)>0$ και επειδή η f συνεχής στο $[-1,+\infty)$ τότε $f\nearrow[-1,+\infty)$ άρα η f 1-1 άρα αντιστρέφεται.
2ος τρόπος:
Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ με $-1<x_1<x_2\Rightarrow 0<x_1+1<x_2+1\Rightarrow (x_1+1)^2<(x_2+1)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1+1)^2-1<(x_2+1)^2-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow[-1,+\infty)$ άρα η f 1-1 άρα αντιστρέφεται.
3ος τρόπος:
Ισχύει $f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x+1-1=x^2+2x,\ x\geq -1$.
Η f είναι τριώνυμο με $\alpha=1>0$ και στο $\left[-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)=[-1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα άρα f 1-1 άρα αντιστρέφεται.
4ος τρόπος:

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [-1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (x_1+1)^2-1=(x_2+1)^2-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1+1)^2=(x_2+1)^2 \Rightarrow |x_1+1|=|x_2+1| \overset{x_1,x_2\le -1}{\Rightarrow} -x_1-1=-x_2-1 \Rightarrow -x_1=-x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Τώρα θα αναζητήσουμε το σύνολο τιμών της f:

1ος τρόπος:

Επειδή η $f \nearrow [-1,+\infty)$ και συνεχής έχει σύνολο τιμών το $f\left([-1,+\infty)\right)=\left[f(-1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[-1,+\infty)$.

2ος τρόπος:

Επειδή η $f \nearrow [-1,+\infty)$ και συνεχής παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=-1$ το $f(-1)=-1$ επομένως έχει σύνολο τιμών το $f\left([-1,+\infty)\right)=[-1,+\infty)$.

3ος τρόπος:

Για κάθε $(x+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2-1 \ge -1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(-1)$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=-1$ το -1 επομένως έχει σύνολο τιμών το $f\left([-1,+\infty)\right)=[-1,+\infty)$.

4ος τρόπος:

Η f ως τριώνυμο με $\alpha=1>0$ έχει ελάχιστο το $f\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=f(-1)=-1$ επομένως έχει σύνολο τιμών το $f\left([-1,+\infty)\right)=[-1,+\infty)$.

Τέλος θα βρούμε τον τύπο της αντίστροφης:

1ος τρόπος:

Θέτουμε $y=f(x) \Leftrightarrow y=(x+1)^2-1 \Rightarrow y+1=(x+1)^2 \overset{y\ge-1}{\Leftrightarrow} x+1=\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x=\sqrt{y+1}-1$ άρα ισχύει $f^{-1}(y)=\sqrt{y+1}-1$, $y\ge-1$ επομένως $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1$, $x\ge-1$

2ος τρόπος:

Για κάθε $x,y \in [-1,+\infty)$ (Χρησιμοποιήσαμε το σύνολο τιμών):

Θέτουμε $y=f(x)$ και εργαζόμαστε ομοίως χωρίς να πάρουμε περιορισμούς.

Β3. Για το πεδίο ορισμού της $f^{-1}\circ g$ ισχύει:

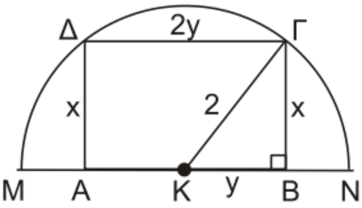
$D_{f^{-1}\circ g}=\left\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_{f^{-1}}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2-1\ge-1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2\ge 0\right\}=\mathbb{R}$

Άρα ισχύει ότι $\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=f^{-1}\left(g(x)\right)=f^{-1}\left(x^2-1\right)=\sqrt{x^2-1+1}-1=\sqrt{x^2}-1=|x|-1$, $x\in\mathbb{R}$

Β4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f^{-1}(x)+1}{\left(f^{-1}\circ g\right)(x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+1}}{-x-1}=\lim\limits_{x\to-1}\left(-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=-\infty$ γιατί κοντά στο -1 έχουμε $x<0: |x|=-x$ και $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{x+1}=0$ με $\sqrt{x+1}>0$ κοντά στο -1.

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο ΜΝ = 4 cm. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x cm και 2y cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x , είναι $E(x)=2\sqrt{4x^2-x^4}$, $x\in(0,2)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\left(E(x)-2\sqrt{3}\right)e^x$, $x\in(0,2)$ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

Μονάδες 7

Απαντήσεις

Γ1. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $2yx$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΒΓ έχουμε: $2^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow y^2=4-x^2 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y=\sqrt{4-x^2}$

Επίσης η κάθετη πλευρά ΒΓ είναι μικρότερη της υποτείνουσας άρα $ΚΓ=2$ cm άρα $0<x<2$ και προκύπτει ότι: $E(x)=2yx=2x\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{x^2}\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{4x^2-x^4}$, $x\in(0,2)$.

Γ2. Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) με παράγωγο: $E'(x)=\dfrac{4x\left(2-x^2\right)}{\sqrt{4x^2-x^4}}$, $x\in(0,2)$

Ισχύει $E'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4x\left(2-x^2\right)}{\sqrt{4x^2-x^4}}=0 \Leftrightarrow 4x\left(2-x^2\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm\sqrt{2} \overset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{2}$.

$$E'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{4x\left(2-x^2\right)}{\sqrt{4x^2-x^4}}>0 \overset{\sqrt{4x^2-x^4}>0}{\Leftrightarrow} 4x\left(2-x^2\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right) \overset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow} x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$$

Άρα η $E\nearrow\left(0,\sqrt{2}\right]$ και $E\searrow\left[\sqrt{2},2\right)$ άρα η Ε παρουσιάζει μέγιστο στο $x=\sqrt{2}$ άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε να έχει μέγιστο εμβαδόν είναι $x=\sqrt{2}$ cm και $y=\sqrt{4-\sqrt{2}^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$ cm.

Γ3. 1ος τρόπος:

$E(x)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x\sqrt{4-x^2}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow x\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2\left(4-x^2\right)=3 \Leftrightarrow 4x^2-x^4=3 \Leftrightarrow$

$x^4-4x^2+3=0 \quad (1)$

Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2-4\omega+3=0 \Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega=3$

Άρα $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ ή $x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Επειδή $x\in(0,2)$ δεκτές είναι $x=1$ και $x=\sqrt{3}$.

2ος τρόπος:

Για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{2}\right]$ είναι $E\nearrow$ και επομένως: $E(x)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow E(x)=E(1) \overset{E\nearrow}{\Leftrightarrow} x=1$

Για κάθε $x\in\left[\sqrt{2},2\right)$ είναι $E\searrow$ και επομένως: $E(x)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow E(x)=E\left(\sqrt{3}\right) \overset{E\nearrow}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{3}$

Επομένως οι τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με $2\sqrt{3}$ cm είναι 1 cm και $\sqrt{3}$ cm.

Γ4. Ηf είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$f'(x)=E'(x)e^{x}+\left(E(x)-2\sqrt{3}\right)e^{x}=e^{x}\left(E'(x)+E(x)-2\sqrt{3}\right)$, $x\in(0,2)$

Η f΄ είναι συνεχής στο $\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$.

$f'\left(\sqrt{2}\right)=e^{\sqrt{2}}\left(E'\left(\sqrt{2}\right)+E\left(\sqrt{2}\right)-2\sqrt{3}\right)=e^{\sqrt{2}}\left(4-2\sqrt{3}\right)=2e^{\sqrt{2}}\left(2-\sqrt{3}\right)>0$

$f'\left(\sqrt{3}\right)=e^{\sqrt{3}}\left(E'\left(\sqrt{3}\right)+E\left(\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}\right)=e^{\sqrt{3}}\left(-4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)=-4e^{\sqrt{3}}<0$

Άρα ισχύει $f'\left(\sqrt{2}\right)f'\left(\sqrt{3}\right)<0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right):f'(x_0)=0$ άρα η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο στο $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$$xf(x)=\sigma\upsilon\nu x-1$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0 & , x=0\end{cases}$

Μονάδες 3

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2020\sigma\upsilon\nu x-x=2020$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 4

Δ5. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ με $F(0)=\rho$ όπου ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (Δ4). Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$\pi\left|F(x)\right|\le 2|x|$$

Μονάδες 7

Απαντήσεις

Δ1. Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $xf(x)=\sigma\upsilon\nu x-1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$.

Επειδή η αι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, είναι συνεχής και στο x = 0, άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right].\\ 0 & , x=0\end{cases}$

Δ2. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $-x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(-x) = \frac{συν(-x)-1}{-x} = -\frac{συνx-1}{x} = -f(x)$ και επειδή $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$, η f είναι περιττή.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$$

Θέτουμε $-x = u$ οπότε $dx = -du$. Για $x = -\frac{\pi}{2}$ είναι $u = \frac{\pi}{2}$ και για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = -\frac{\pi}{2}$. Τότε

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(u)du = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{-xημx - συνx + 1}{x^2}$$

Έστω $\varphi(x) = -xημx - συνx + 1,$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$\varphi'(x) = -xσυνx$.

Επειδή $συνx > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι $\varphi'(x) > 0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $\varphi'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η φ έχει μέγιστο στο x = 0, άρα για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\varphi(x) \le \varphi(0) = 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, άρα για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Δ4. $2020συνx - x = 2020 \Leftrightarrow 2020συνx - 2020 = x \Leftrightarrow 2020(συνx - 1) = x$ (1)

Αρχικά παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την x = 0.

Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η (1) γίνεται $\frac{συνx-1}{x} = \frac{1}{2020} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2020}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left[-\frac{2}{\pi}, 0\right)$. Επειδή $\frac{1}{2020} \in f(\Delta_1)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2020}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1. Επειδή $\frac{1}{2020} \notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2020}$ είναι αδύνατη στο Δ_2. Τελικά η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2020}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Δ5.Είναι $F(0)=0$

Αρχικά παρατηρούμε ότι για x=0 ισχύει η ισότητα.

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $(0,x)$ με $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε υπάρχει $\xi_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\frac{F(x)}{x}.$$

Είναι $0<\xi_1<x\le\frac{\pi}{2}\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(\xi_1)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{F(x)}{x}>-\frac{2}{\pi}\ (2)$

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $(x,0)$ με $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$, οπότε υπάρχει $\xi_2\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_2)=\frac{F(0)-F(x)}{-x}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\frac{F(x)}{x}.$$

Είναι $-\frac{\pi}{2}\le x<\xi_2<0\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(\xi_2)\le f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{F(x)}{x}<\frac{2}{\pi}\ (3)$

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι $-\frac{2}{\pi}<\frac{F(x)}{x}<\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow\left|\frac{F(x)}{x}\right|<\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow\frac{|F(x)|}{|x|}<\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow\pi|F(x)|<2|x|$