Διαγώνισμα θεωρίας στις Συναρτήσεις και τα Όρια

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες.

α) $f(x)g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ ή $g(x)=0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ τότε η gof είναι γνησίως αύξουσα

γ) Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-1$

ε) Α ν $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ με τη προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε $f(x)\le g(x)$.

ζ) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)>0$, τότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

η) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

2.α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0\in A$;

β) Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1–1;

γ) Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

δ) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία
Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος; Δώστε οποιοδήποτε παράδειγμα.

3.α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

β) Εστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.