

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Διαγώνισμα στο 1ο κεφάλαιο

ΘΕΜΑ Α

Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις που ακολουθούν:

1. Αν υπάρχει στο \mathbb{R} το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε: $[f(x_0)]' = f'(x_0)$.
3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.
4. Αν $f(x) = (x^2 - 1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με μηδέν.
5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.
6. Αν μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} είναι άρτια, τότε η f' είναι επίσης άρτια
7. Αν $f(x) = x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f με παράλληλες εφαπτομένες.
8. Αν δυο συναρτήσεις τέμνονται, τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται κοινή εφαπτομένη.
9. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f .
10. Αν $f(x) = e^x$, τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$.
11. $(\eta\mu x^4)' = 4\eta\mu^3 x \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (μ11x2)

ΘΕΜΑ Β

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $t \in (0, 24]$ ο χρόνος σε ώρες.

- B1. Να αποδείξετε ότι για $t \in (0, 24]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4, 24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται. μ 7
- B2. Να υπολογίσετε την τιμή του α , αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι -1°C . μ 6
- B3. Για $\alpha=3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0°C . μ 5
- B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2 - 16}$ μ 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\lambda}{x}$, $\lambda > 0$.

- Γ.1. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της f . (μ 8)
- Γ.2. Αν B το ακρότατο σημείο της C_f και A το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ τότε να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου που έχει κορυφές τα A , B και τις πλευρές παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ως συνάρτηση του λ . (μ 8)
- Γ.3. Να βρείτε για ποια τιμή του λ η περίμετρο του παραπάνω ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη. (μ 10)

ΘΕΜΑ Δ

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x > 0$. Ένα σημείο M κινείται στη C_f και έστω K η προβολή του στον άξονα $x'x$. Αν το K απομακρύνεται από την αρχή O των αξόνων με ταχύτητα 3cm/sec , τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι 2.

Δ1. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

α) της απόστασης KM μ 4

β) της απόστασης OM μ 4

γ) της απόστασης OE , όπου e είναι το σημείο τομής τυχαίας εφαπτομένης της C_f με τον άξονα $x'x$. μ 7

Δ.2. Να βρείτε την εφαπτομένη ϵ της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(2,5)$. μ 5

Δ.3. Να βρείτε σημείο της ϵ που έχει ελάχιστη απόσταση από το σημείο $B(-1,1)$. μ 7

Καλή τύχη!

Στέλιος Μιχαήλογλου

askisopolis