Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Α′ Διαγωνισμός Επιλογής κάτω των 15 ½ Ετών

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 13/03/2021 Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **<u>όλα</u>** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλα τα ζευγάρια των πρώτων αριθμών (p,q) για τα οποία ισχύει η εξίσωση

$$5pq^2 + p = q^3 + 15p^3 + 7$$

Πρόβλημα 2. Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί πραγματικοί αριθμοί x,y,z,ω τέτοιοι ώστε $xy = 1$ και $z\omega = 1$. Αν A,B είναι οι αριθμοί

$$A = (x+z)(y+z)(x+\omega)(y+\omega)$$
$$B = (x\omega + yz)(xz + y\omega)$$

να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της διαφοράς $A - B$.

Πρόβλημα 3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Οι παράλληλες ευθείες από τα σημεία Γ και Δ προς τις $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο Π. Η ευθεία $B\Pi$ τέμνει τις $A\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Αν P το σημείο τομής των ευθειών $\Gamma\Pi$ και ΔK να αποδείξετε:

(α) Η ευθεία PZ περνά από το μέσο του $\Delta\Pi$

(β) $\Delta Z = 2\Gamma Z$

Πρόβλημα 4. Δύο παιδιά, ο Νικόλας και ο Γιώργος παίζουν μερικές φορές ένα παιχνίδι στο οποίο ο νικητής συγκεντρώνει x πόντους και ο χαμένος y πόντους, όπου x,y είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί με $x > y$. Υποθέτουμε ότι σε κάθε παιχνίδι ένα από τα παιδιά είναι ο νικητής και ο άλλος ο χαμένος.

Αφού έπαιξαν ορισμένα παιχνίδια, ο Νικόλας συγκέντρωσε συνολικά 147 πόντους και ο Γιώργος συγκέντρωσε συνολικά 123 πόντους. Αν ξέρουμε ότι ο Γιώργος κέρδισε 6 παιχνίδια, να βρείτε τα x και y.

Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Α′ Διαγωνισμός Επιλογής κάτω των 15 ½ Ετών

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 13/03/2021 Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλα τα ζευγάρια των πρώτων αριθμών (p,q) για τα οποία ισχύει η εξίσωση

$$5pq^2 + p = q^3 + 15p^3 + 7$$

Προτεινόμενη Λύση.

Αν οι πρώτοι (p,q) είναι και οι δύο περιττοί αριθμοί τότε το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης θα είναι άρτιος αριθμός ενώ το δεύτερο μέλος της θα είναι περιττός αριθμός. Αυτό όμως είναι αδύνατο. Επομένως ένας από τους αριθμούς p,q θα είναι άρτιος. Δηλαδή $p = 2$ ή $q = 2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Αν $p = 2$ τότε η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$10q^2 + 2 = q^3 + 15 \cdot 2^3 + 7 \iff q^3 - 10q^2 = -125 \iff q^2(q - 10) = -125$$

Άρα από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε ότι το q διαιρεί τον 125 και αφού q πρώτος αριθμός η μόνη δυνατή λύση είναι $q = 5$. Η μοναδική λύση σε αυτή την περίπτωση είναι το ζεύγος $(p,q) = (2,5)$.
Αν $q = 2$ τότε η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$20p + p = 8 + 15p^3 + 7 \iff 21p = 15(1 + p^3) \iff 7p = 5(1 + p^3)$$

Αφού όμως το p είναι περιττός στην τελευταία εξίσωση θα έχουμε ότι το πρώτο μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι περιττός ενώ το δεύτερο μέλος της θα είναι άρτιος. Άτοπο.
Επομένως το μόνο ζεύγος πρώτων που ικανοποιεί την αρχική εξίσωση είναι το $(p,q) = (2,5)$.

Πρόβλημα 2. Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y,z,ω τέτοιοι ώστε $xy = 1$ και $z\omega = 1$. Αν A,B είναι οι αριθμοί

$$A = (x + z)(y + z)(x + \omega)(y + \omega)$$
$$B = (x\omega + yz)(xz + y\omega)$$

να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της διαφοράς $A - B$.

Προτεινόμενη Λύση.

Κάνοντας πράξεις η παράσταση A γράφεται

$$A = (x^2 + x\omega + xz + \omega z)(y^2 + y\omega + zy + z\omega)$$

και αφού από την υπόθεση έχουμε $xy = 1$ και $z\omega = 1$, παίρνουμε

$$A = (x^2 + x\omega + xz + 1)(y^2 + y\omega + zy + 1)$$

Πολλαπλασιάζοντας θα πάρουμε

$$A = (x^2y^2+x^2y\omega+x^2zy+x^2)+(x\omega y^2+xy\omega^2+x\omega zy+x\omega)+(xzy^2+xzy\omega+xz^2y+xz)+(y^2+y\omega+zy+1)$$

και αφού $xy = 1$ και $z\omega = 1$ θα έχουμε

$$A = 4 + 2(x\omega + xz + y\omega + yz) + x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2, \qquad (1)$$

Κάνοντας πράξεις η παράσταση B γράφεται

$$B = x^2\omega z + x\omega^2 y + yxz^2 + y^2 z\omega$$

και επειδή $xy = 1$ και $z\omega = 1$ παίρνουμε

$$B = x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2 \qquad (2)$$

Αφαιρώντας τις (1) και (2) θα πάρουμε

$$A - B = 4 + 2(x\omega + xz + y\omega + yz) = 4 + 2[(x + y)\omega + (x + y)z] \qquad (3)$$

ή διαφορετικά

$$A - B = 4 + 2(x + y)(\omega + z)$$

Όμως από την υπόθεση $xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}$ θα έχουμε

$$x + y = x + \tfrac{1}{x} \geq 2 \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x - 1)^2 \geq 0 \iff x + y \geq 2$$

όπου η τελευταία ανισότητα είναι προφανής. Όμοια έχουμε ότι $\omega + z \geq 2$.
Επομένως η (3) γίνεται,

$$A - B = 4 + 2[(x + y)\omega + (x + y)z] = 4 + 2(x + y)(\omega + z) \geq 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της διαφοράς $A - B$ είναι 12.

Πρόβλημα 3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Οι παράλληλες ευθείες από τα σημεία $Γ$ και $Δ$ προς τις $ΒΔ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο $Π$. Η ευθεία $ΒΠ$ τέμνει τις $ΑΓ$ και $ΓΔ$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Αν P το σημείο τομής των ευθειών $ΓΠ$ και $ΔK$ να αποδείξετε:

(α) Η ευθεία PZ περνά από το μέσο του $ΔΠ$

(β) $ΔZ = 2ΓZ$

Προτεινόμενη Λύση.

(α) Από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε

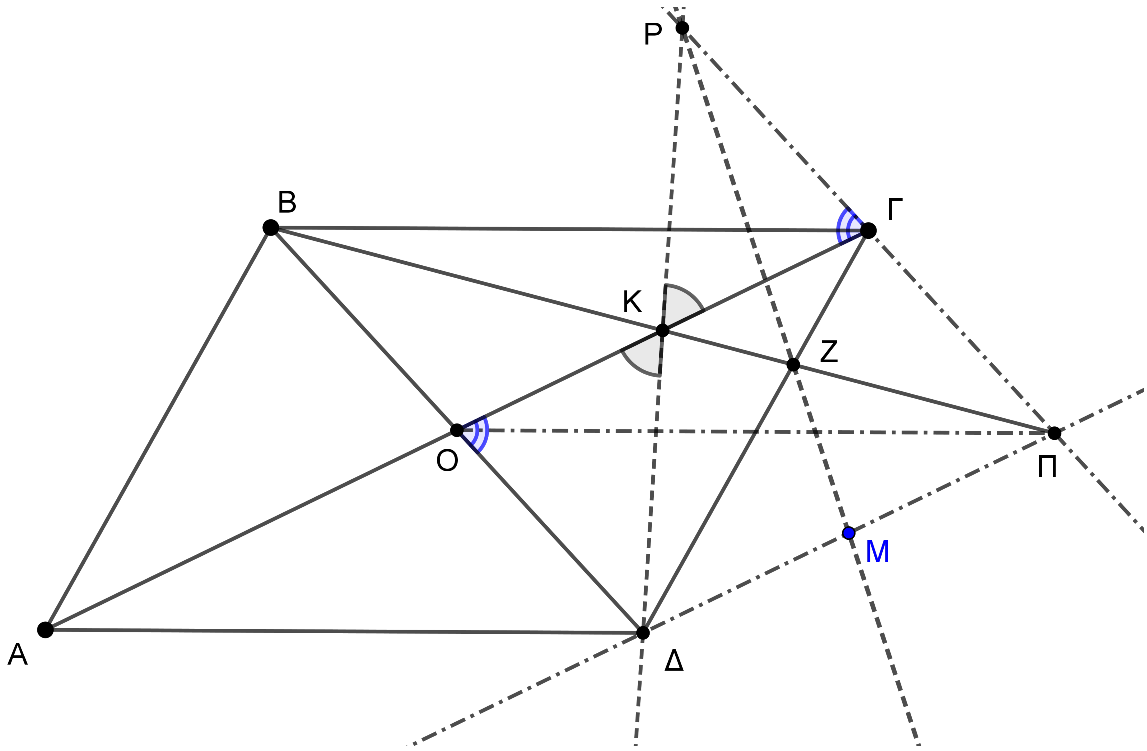
$$BO =\parallel O\Delta$$

και από το παραλληλόγραμμο $O\Gamma\Pi\Delta$ θα έχουμε

$$O\Delta =\parallel \Gamma\Pi$$

Επομένως αφού από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε $BO =\parallel \Gamma\Pi$, συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $BO\Pi\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοι του $B\Pi$ και $O\Gamma$ διχοτομούνται και παίρνουμε ότι

$$OK = K\Gamma \qquad (1)$$



Επίσης έχουμε

$$\angle PK\Gamma = \angle OK\Delta \qquad (2)$$

ως κατάκορυφήν γωνίες, και

$$\angle P\Gamma K = \angle \Delta OK \qquad (3)$$

ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $B\Delta$ και $\Pi\Gamma$. Από τις (1), (2) και (3) θα έχουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle\Delta OK$ και $\triangle P\Gamma K$ είναι ίσα. Επομένως παίρνουμε

$$O\Delta =\parallel P\Gamma$$

δηλαδή το τετράπλευρο $O\Delta\Gamma P$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα, $\Delta K = KP$, δηλαδή το K είναι το μέσον του ΔP.
Επίσης έχουμε

$$O\Delta =\parallel P\Gamma \text{ και } O\Delta =\parallel \Gamma\Pi$$

δηλαδή το Γ είναι το μέσον του $P\Pi$.
Επομένως οι διάμεσοι ΠK και $\Delta\Gamma$ του τριγώνου $\triangle\Delta P\Pi$ τέμνονται στο σημείο Z που είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου $\triangle\Delta P\Pi$.Άρα η τρίτη διάμεσος του τριγώνου που διέρχεται από την κορυφή P και το Z θα διέρχεται από το μέσον M της πλευράς $\Delta\Pi$ του τριγώνου $\triangle\Delta P\Pi$.

(β) Ξέρουμε ότι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου απέχει από την κορυφή του απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου του τριγώνου.
Επομένως θα έχουμε

$$\Delta Z = \tfrac{2}{3}\Delta\Gamma = \tfrac{2}{3}(\Delta Z + Z\Gamma) \Longrightarrow \Delta Z - \tfrac{2}{3}\Delta Z = \tfrac{2}{3}Z\Gamma \Longrightarrow \tfrac{1}{3}\Delta Z = \tfrac{2}{3}Z\Gamma \Longrightarrow \Delta Z = 2Z\Gamma$$

Πρόβλημα 4. Δύο παιδιά, ο Νικόλας και ο Γιώργος παίζουν μερικές φορές ένα παιχνίδι στο οποίο ο νικητής συγκεντρώνει x πόντους και ο χαμένος y πόντους, όπου x,y είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί με $x > y$. Υποθέτουμε ότι σε κάθε παιχνίδι ένα από τα παιδιά είναι ο νικητής και ο άλλος ο χαμένος.

Αφού έπαιξαν ορισμένα παιχνίδια, ο Νικόλας συγκέντρωσε συνολικά 147 πόντους και ο Γιώργος συγκέντρωσε συνολικά 123 πόντους. Αν ξέρουμε ότι ο Γιώργος κέρδισε 6 παιχνίδια, να βρείτε τα x και y.

Προτεινόμενη Λύση.

Έστω α ο αριθμός των νικητήριων παιχνιδιών του Νικόλα. Τότε θα έχουμε

$$\alpha x + 6y = 147$$
$$6x + \alpha y = 123$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες εξισώσεις θα έχουμε

$$\alpha x + 6y - 6x - \alpha y = 24 \iff (\alpha - 6)(x - y) = 24 \qquad (1)$$

Οι αριθμοί $\alpha - 6$ και $x - y$ είναι θετικοί ακέραιοι γιατί οι α, x,y είναι μή αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί με $x > y$ και $\alpha > 6$ αφού ο Νικόλας έχει περισσότερες νίκες.

Από την εξίσωση $\alpha x + 6y = 147$ συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός αx είναι περιττός. Αφού μόνο το γινόμενο δύο περιττών αριθμών μας δίνει περιττό αριθμό, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός α πρέπει να είναι περιττός. Τότε και ο $\alpha - 6$ θα είναι περιττός αριθμός.

Επομένως από την (1) παίρνουμε ότι ο $\alpha - 6$ είναι περιττός διαιρέτης του 24. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- Αν $\alpha - 6 = 1 \iff \alpha = 7$ τότε $x - y = 24$. Η εξίσωση $\alpha x + 6y = 147$ γίνεται

  $$7(y + 24) + 6y = 147 \iff 13y = -21$$

  που είναι αδύνατο.
- Αν $\alpha - 6 = 3 \iff \alpha = 9$ τότε $x - y = 8$. Η εξίσωση $\alpha x + 6y = 147$ γίνεται

  $$9(y + 8) + 6y = 147 \iff 15y = 75 \iff y = 5$$

  και $x - y = 8 \iff x = 5 + 8 \iff x = 13$.