ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{4}}+\sqrt{\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{4}}=\sqrt{2}$

2. Αν $2<x<3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$.

3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:
$A=\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{128}$, $B=\sqrt{3}+\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{243}$

4. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:
i. $\left(2x^2+1\right)^2$ **ii.** $\left(\alpha^2-2\beta^2\right)^2$ **iii.** $\left(-3x^2+2\right)^2$ **iv.** $\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{2}{3}\beta\right)^2$ **v.** $\left(x^2-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)$
vi. $(\alpha+2\beta)^3$ **vii.** $(1-xy)^3$ **viii.** $\left(2\alpha\beta^2-3\beta\right)^3$

5. Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:
i. $(\ 3\ +\ldots\ )^2=\ \ldots\ +\ \ldots\ +\ 16y^2$ **ii.** $(\ \ldots\ -\ 9\beta)^2=\ 25\ -\ \ldots\ +\ \ldots$
iii. $(\ \ldots-\ldots)^2=\ldots-6\alpha\beta+\ldots$ **iv.** $(\ldots-2\beta)^2=3\alpha^2-\ \ldots\ldots+\ \ldots\ldots$

6. Να γίνουν οι πράξεις με την βοήθεια των σχετικών ταυτοτήτων:
i. $(x+2)^2-(x+3)(x-3)\ -\ 2(2x-3)$ **ii.** $(2x+1)^2-(3x-2)^2-(2x+5)(5-2x)$

7. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:
α) $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ **β)** $\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-(2\alpha\beta)^2=\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2$

8. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $2\alpha\beta-2\alpha\gamma=$ **β)** $6x^2+3x=$ **γ)** $3\alpha^2+3\alpha\beta-3\alpha\gamma=$ **δ)** $6\alpha^3\beta^2-3\alpha^2\beta^3=$
ε) $\alpha\left(x^2+2\right)+\beta\left(x^2+2\right)=$ **στ)** $12x^2y+6xy^2-3xy=$ **ζ)** $15\alpha^3\beta^2\gamma-5\alpha^2\beta^3\gamma^2-20\alpha^4\beta^4\gamma^3x=$
η) $x(2\alpha-\beta)+y(\beta-2\alpha)=$ **θ)** $\alpha(x-1)-x+1=$

9. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $(\alpha+\beta)(x-3y)-2\alpha(x-3y)=$ **β)** $(4\alpha-2\beta)(2x-3y)+(3y-2x)(\beta-2\alpha)=$
γ) $\alpha^2(x-1)(\alpha+\beta)+\alpha^2(1-x)=$ **δ)** $6(y-2)^3(y+8)^5+3(y+8)^6(y-2)^2=$

10. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $\alpha x+\beta x+\alpha y+\beta y=$ **β)** $x^2+xy-x-y=$ **γ)** $x^3+x^2+x+1=$
δ) $\alpha^2-5\alpha+4\alpha-20=$ **ε)** $2x^4-2x^3+\ 3x-3=$ **στ)** $\alpha^3-\alpha^2\beta\ -\alpha\beta^2+\beta^3=$

11. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $4\ -x^2=$ **β)** $9\theta^2-25=$ **γ)** $16\kappa^2-\ 81\lambda^2=$ **δ)** $\alpha^2-5=$ **ε)** $\alpha^6-\delta^4=$
ζ) $(\alpha-2\beta)^2-4\beta^2=$ **η)** $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=$ **θ)** $(x-y)^2-1=$ **ι)** $\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{100}{\beta^4}=$

12. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $3x^3-3x=$ **β)** $3\alpha^3\beta\ -27\alpha\beta^3=$ **γ)** $x^{\mu+2}-x^{\mu}=$ **δ)** $x^4-y^4=$
ε) $5\alpha^4-\ 80=$ **στ)** $\alpha x^2-\alpha y^2+\beta x^2-\beta y^2=$ **ζ)** $\alpha^5-1+\alpha^4-\alpha=$

13. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{4x^2 - xy}{12xy - 3y^2}$ **β)** $\dfrac{\varphi^3 - \varphi}{\varphi^2 + \varphi}$ **γ)** $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$ **δ)** $\dfrac{(3x - 2y)^2}{4y^2 - 9x^2}$ **ε)** $\dfrac{3\alpha\beta^3 + 3\alpha^3\beta - 6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3 - 6\alpha^3\beta}$

14. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $x^2 + 10x + 25$ **β)** $9x^2 + 4 - 12x$ **γ)** $x^2 - 3x - 10$ **δ)** $x^2 + 5x + 4$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x - 2}{x} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ **β)** $\dfrac{2}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x^2 - 2x} = \dfrac{4 - x}{x^2 + 2x}$

16. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις:

$A = (x - 2)^2 - (3x - 6)(2x + 5) + x^2 - 4,\quad B = 9(2x - 3)^2 - 4(5x + 3)^2$

α) Να τρέψετε σε γινόμενα τις παραστάσεις Α, Β.

β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{A}{B}$ **γ)** Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{A}{B} = 5$.

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^2 + 5x + 6 = 0$ **β)** $-x^2 - 7x - 12 = 0$ **γ)** $x^2 - 4x + 1 = 0$ **δ)** $9x^2 + 12x + 4 = 0$ **ε)** $x^2 + 3x + 3 = 0$

18. Να αποδείξετε ότι: **α)** $x^2 + 9 \geq 6x$ **β)** $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

19. Αν $\chi > 3$ και $y > 4$, να αποδείξετε ότι: $3x + 4y > 25$

20. Να λύσετε τις ανισώσεις: **α)** $\dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{2x + 3}{5} > \dfrac{x + 5}{4}$ **β)** $\dfrac{x + 1}{2} > x - \dfrac{2x + 3}{4}$

21. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του χ για τις οποίες ισχύει: $-6 < 2 - 4x < 9$

22. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} -x + 5y = 9 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = -3 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{\alpha} + \dfrac{4}{\beta} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$

23. Αν η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ έχει ρίζες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = -1$, να βρείτε τα α και β.

24. Να βρείτε μία λύση $(x_0,\ y_0)$ του συστήματος $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$ τέτοια ώστε $3x_0 - y_0 = 1$.

25. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - 6y = 13 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ με δεδομένο ότι το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda x - 4y = 16 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ δέχεται σαν λύση το ζεύγος $(x,\ y) = (3,\ -1)$.

Γεωμετρία

26. Σε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ να δείξετε ότι:
α) Οι διχοτόμοι ΑΚ και ΔΛ είναι ίσες β) Οι διάμεσοι ΒΜ και ΕΘ είναι ίσες.

27. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ορίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

28. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τα σημεία Δ, Ε της ευθείας ΒΓ που δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ. Αν $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

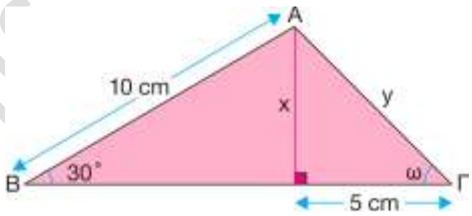
29. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Αν ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

30. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ και πάνω σε αυτή παίρνουμε τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Ν' αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα **β)** ΑΒ = ΔΓ **γ)** $Β\hat{Δ}Γ = \hat{Α}$.

31. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ, από το οποίο φέρνουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ προς τις άλλες πλευρές. Να δειχθεί ότι ΜΔ=ΜΕ.

32. Να υπολογίσετε τα μήκη χ, y καθώς και τη γωνία ω του διπλανού σχήματος.



Τριγωνομετρία

33. Να βρείτε τη γωνία χ όταν $0 \le χ \le 180°$ και:

α) $συνx = 1 - συνx$ **β)** $2ημx + \sqrt{3} = 0$ **γ)** $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

34. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{ημx + συνx}{2εφx + σφ45^\circ}$, *όταν* $x = 120^o$.

35. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και γνωρίζουμε ότι $συνω = -\frac{5}{6}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

36. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και γνωρίζουμε ότι $εφω = -\frac{4}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Π = 10ημω - 15συνω + 12εφω$.

37. Να αποδείξετε ότι:

α) $ημ^4x - συν^4x = 1 - 2συν^2x$ **β)** $\frac{1}{συν^2x} + \frac{1}{ημ^2x} = \frac{1}{ημ^2x \cdot συν^2x}$

γ) $(2ημx + 3συνx)^2 + (3ημx - 2συνx)^2 = 13$ **δ)** $\frac{ημα}{1 - συνα} + \frac{1 - συνα}{ημα} = \frac{2}{ημα}$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

1. $\sqrt{\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{4}}+\sqrt{\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{4}}=\dfrac{\left|1+\sqrt{2}\right|}{2}+\dfrac{\left|1-\sqrt{2}\right|}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

2. Είναι $A=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x-2|+|x-3|$ και όταν $2<x<3$ είναι $x-2>0,\ x-3<0$ και
$A=x-2-x+3=1$

3. $A=\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{128}=\sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{64\cdot 2}\Leftrightarrow$
$A=\sqrt{4}\sqrt{2}+\sqrt{9}\sqrt{2}+\sqrt{16}\sqrt{2}-\sqrt{64}\sqrt{2}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$B=\sqrt{3}+\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{243}=\sqrt{3}+\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 3}-\sqrt{81\cdot 3}=\sqrt{3}+\sqrt{9}\sqrt{3}+\sqrt{16}\sqrt{3}-\sqrt{81}\sqrt{3}\Leftrightarrow$
$B=\sqrt{3}+3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

4. i. $\left(2x^2+1\right)^2=\left(2x^2\right)^2+2\cdot 2x^2\cdot 1+1^2=4x^4+4x^2+1$

ii. $\left(\alpha^2-2\beta^2\right)^2=\left(\alpha^2\right)^2-2\alpha^2\cdot 2\beta^2+\left(2\beta^2\right)^2=\alpha^4-4\alpha^2\beta^2+4\beta^4$

iii. $\left(-3x^2+2\right)^2=\left(-3x^2\right)^2+2\left(-3x^2\right)\cdot 2+2^2=9x^4-12x^2+4$

iv. $\left(\dfrac{1}{2}\alpha-\dfrac{2}{3}\beta\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\alpha\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{2}\alpha\cdot\dfrac{2}{3}\beta+\left(\dfrac{2}{3}\beta\right)^2=\dfrac{1}{4}\alpha^2-\dfrac{2}{3}\alpha\beta+\dfrac{4}{9}\beta^2$

v. $\left(x^2-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)=\left(x^2\right)^2-\sqrt{2}^2=x^4-2$

vi. $(\alpha+2\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\cdot 2\beta+3\alpha(2\beta)^2+(2\beta)^3=\alpha^3+6\alpha^2\beta+12\alpha\beta^2+8\beta^3$

vii. $(1-xy)^3=1^3-3\cdot 1\cdot xy+3\cdot 1\cdot(xy)^2-(xy)^3=1-3xy+3x^2y^2-x^3y^3$

viii. $\left(2\alpha\beta^2-3\beta\right)^3=\left(2\alpha\beta^2\right)^3-3\cdot\left(2\alpha\beta^2\right)^2\cdot 3\beta+3\cdot 2\alpha\beta^2\cdot(3\beta)^2-(3\beta)^3=8\alpha^3\beta^6-36\alpha^2\beta^5+54\alpha\beta^4-27\beta^3$

5. i. $(3+4y)^2=9+24y+16y^2$ **ii.** $(5-9\beta)^2=25-90\beta+81\beta^2$

iii. $(3\alpha-\beta)^2=9\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2$ **iv.** $\left(\alpha\sqrt{3}-2\beta\right)^2=3\alpha^2-4\alpha\beta\sqrt{3}+4\beta^2$

6. i. $(x+2)^2-(x+3)(x-3)-2(2x-3)=x^2+\cancel{4x}+4-\left(x^2-9\right)-\cancel{4x}+6=\cancel{x^2}+10-\cancel{x^2}+9=19$

ii. $(2x+1)^2-(3x-2)^2-(2x+5)(5-2x)=4x^2+4x+1-\left(9x^2-12x+4\right)-\left(5^2-(2x)^2\right)=$
$4x^2+4x+1-9x^2+12x-4-25+4x^2=-x^2+16x-28$

7. α) $(x+y)^2-(x-y)^2=x^2+2xy+y^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)=\cancel{x^2}+2xy+\cancel{y^2}-\cancel{x^2}+2xy-\cancel{y^2}=4xy$

β) $\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-(2\alpha\beta)^2=\left(\alpha^2\right)^2+2\alpha^2\beta^2+\left(\beta^2\right)^2-4\alpha^2\beta^2=\left(\alpha^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2+\left(\beta^2\right)^2=\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2$

8. α) $2\alpha\beta-2\alpha\gamma=2\alpha(\beta-\gamma)$ **β)** $6x^2+3x=3x(2x+1)$

γ) $3\alpha^2+3\alpha\beta-3\alpha\gamma=3\alpha(\alpha+\beta-\gamma)$ **δ)** $6\alpha^3\beta^2-3\alpha^2\beta^3=3\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)$

ε) $\alpha\left(x^2+2\right)+\beta\left(x^2+2\right)=\left(x^2+2\right)(\alpha+\beta)$ **στ)** $12x^2y+6xy^2-3xy=3xy(4x+3y-1)$

ζ) $15\alpha^3\beta^2\gamma-5\alpha^2\beta^3\gamma^2-20\alpha^4\beta^4\gamma^3x=5\alpha^2\beta^2\gamma\left(3\alpha-\beta\gamma-4\alpha^2\beta^2\gamma^2x\right)$

η) $x(2\alpha-\beta)+y(\beta-2\alpha)=x(2\alpha-\beta)-y(2\alpha-\beta)=(2\alpha-\beta)(x-y)$

θ) $\alpha(x-1)-x+1=\alpha(x-1)-(x-1)=(x-1)(\alpha-1)$

9. α) $(\alpha+\beta)(x-3y)-2\alpha(x-3y)=(x-3y)(\alpha+\beta-2\alpha)=(x-3y)(\beta-\alpha)$

β) $(4\alpha-2\beta)(2x-3y)+(3y-2x)(\beta-2\alpha)=-2(\beta-2\alpha)(2x-3y)-(2x-3y)(\beta-2\alpha)=$
$-3(2x-3y)(\beta-2\alpha)$

γ) $\alpha^2(x-1)(\alpha+\beta)+\alpha^2(1-x)=\alpha^2(x-1)(\alpha+\beta)-\alpha^2(x-1)=\alpha^2(x-1)(\alpha+\beta-1)$

δ) $6(y-2)^3(y+8)^5+3(y+8)^6(y-2)^2=3(y+8)^5(y-2)^2\left[2(y-2)+(y+8)\right]=$
$3(y+8)^6(y-2)^2(3y+4)$

10. α) $\alpha x+\beta x+\alpha y+\beta y=x(\alpha+\beta)+y(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(x+y)$

β) $x^2+xy-x-y=x(x+y)-(x+y)=(x+y)(x-1)$

γ) $x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$

δ) $\alpha^2-5\alpha+4\alpha-20=\alpha(\alpha-5)+4(\alpha-5)=(\alpha-5)(\alpha+4)$

ε) $2x^4-2x^3+3x-3=2x^3(x-1)+3(x-1)=(x-1)(2x^3+3)$

στ) $\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^2(\alpha-\beta)-\beta^2(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)=$
$(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$

11. α) $4-x^2=(2-x)(2+x)$ **β)** $9\theta^2-25=(3\theta-5)(3\theta+5)$

γ) $16\kappa^2-81\lambda^2=(4\kappa-9\lambda)(4\kappa+9\lambda)$ **δ)** $\alpha^2-5=(\alpha-\sqrt{5})(\alpha+\sqrt{5})$

ε) $\alpha^6-\delta^4=(\alpha^3-\delta^2)(\alpha^3+\delta^2)$

ζ) $(\alpha-2\beta)^2-4\beta^2=\left[(\alpha-2\beta)-2\beta\right]\left[(\alpha-2\beta)+2\beta\right]=\alpha(\alpha-4\beta)$

η) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=\left[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\right]\left[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\right]=2\beta\cdot 2\alpha=4\alpha\beta$

θ) $(x-y)^2-1=(x-y-1)(x-y+1)$ **ι)** $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{100}{\beta^4}=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{10}{\beta^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{10}{\beta^2}\right)$

12. α) $3x^3-3x=3x(x^2-1)=3x(x-1)(x+1)$

β) $3\alpha^3\beta-27\alpha\beta^3=3\alpha\beta(\alpha^2-9\beta^2)=3\alpha\beta(\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)$

γ) $x^{\mu+2}-x^{\mu}=x^{\mu}(x^2-1)=x^{\mu}(x-1)(x+1)$

δ) $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

ε) $5\alpha^4-80=5(\alpha^4-16)=5(\alpha^2-4)(\alpha^2+4)=5(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha^2+4)$

ζ) $\alpha x^2-\alpha y^2+\beta x^2-\beta y^2=\alpha(x^2-y^2)+\beta(x^2-y^2)=(\alpha+\beta)(x^2-y^2)=(\alpha+\beta)(x-y)(x+y)$

η) $\alpha^5-1+\alpha^4-\alpha=\alpha^4(\alpha+1)-(\alpha+1)=(\alpha+1)(\alpha^4-1)=(\alpha+1)(\alpha^2-1)(\alpha^2+1)=$
$(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+1)=(\alpha+1)^2(\alpha-1)(\alpha^2+1)$

13. α) $\frac{4x^2-xy}{12xy-3y^2}=\frac{x\cancel{(4x-y)}}{3y\cancel{(4x-y)}}=\frac{x}{3y}$

β) $\frac{\varphi^3-\varphi}{\varphi^2+\varphi}=\frac{\cancel{\varphi}(\varphi^2-1)}{\cancel{\varphi}(\varphi+1)}=\frac{(\varphi-1)\cancel{(\varphi+1)}}{\cancel{\varphi+1}}=\varphi-1$

γ) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-x-3x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-1)-3(x-1)}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x-1)\cancel{(x-3)}}=\frac{x+3}{x-1}$

δ) $\frac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2}=\frac{(3x-2y)^2}{(2y-3x)(2y+3x)}=\frac{(2y-3x)^{\cancel{2}}}{\cancel{(2y-3x)}(2y+3x)}=\frac{2y-3x}{2y+3x}$

ε) $\frac{3\alpha\beta^3+3\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3-6\alpha^3\beta}=\frac{\cancel{3}\,\cancel{\alpha\beta}(\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta)}{\cancel{6}^2\,\cancel{\alpha\beta}(\beta^2-\alpha^2)}=\frac{(\beta-\alpha)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(\beta-\alpha)}(\beta+\alpha)}=\frac{\beta-\alpha}{2(\beta+\alpha)}$

14. α) $x^2+10x+25=x^2+2\cdot5\cdot x+5^2=(x+5)^2$

β) $9x^2+4-12x=(3x)^2-2\cdot3x\cdot2+2^2=(3x-2)^2$

γ) $x^2-3x-10=(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

Είναι $\alpha+\beta=-3$ και $\alpha\beta=-10$, άρα $\alpha=-2$ και $\beta=5$, οπότε $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$

δ) $x^2+5x+4=x^2+x+4x+4=x(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x+4)$

15. α) Πρέπει $x\neq0$ και $x-1\neq0\Leftrightarrow x\neq1$

$$\frac{x-2}{x}=\frac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow(x-2)(x-1)=x(x+1)\Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x-x+2=\cancel{x^2}+x\Leftrightarrow$$

$-2x-x-x=-2\Leftrightarrow -4x=-2\Leftrightarrow \frac{-4x}{-4}=\frac{-2}{-4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ δεκτή

β) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}\Leftrightarrow \frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{x}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}$

$ΕΚΠ=x(x-2)(x+2)\neq0\Leftrightarrow x\neq0$ και $x-2\neq0\Leftrightarrow x\neq2$ και $x+2\neq0\Leftrightarrow x\neq-2$

$$x(x-2)(x+2)\frac{2}{(x-2)(x+2)}-x(x-2)(x+2)\frac{x}{x(x-2)}=x(x-2)(x+2)\frac{4-x}{x(x+2)}\Leftrightarrow$$

$$2x-x(x+2)=(x-2)(4-x)\Leftrightarrow$$

$$\cancel{2x}-\cancel{x^2}-\cancel{2x}=4x-\cancel{x^2}-8+2x\Leftrightarrow$$

$$8=6x\Leftrightarrow$$

$\frac{6x}{6}=\frac{8}{6}\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ δεκτή

16. α) $A=(x-2)^2-(3x-6)(2x+5)+x^2-4=(x-2)^2-3(x-2)(2x+5)+(x-2)(x+2)\Leftrightarrow$

$$A=(x-2)\left[x-\cancel{2}-3(2x+5)+x+\cancel{2}\right]=(x-2)(-4x-15)=-(x-2)(4x+15)$$

$$B=9(2x-3)^2-4(5x+3)^2=\left[3(2x-3)-2(5x+3)\right]\left[3(2x-3)+2(5x+3)\right]\Leftrightarrow$$

$$B=(6x-9-10x-6)(6x-9+10x+6)=(-4x-15)(16x-3)=-(4x+15)(16x-3)$$

β) $\frac{A}{B}=\frac{-(x-2)\cancel{(4x+15)}}{-\cancel{(4x+15)}(16x-3)}=\frac{x-2}{16x-3}$

γ) Αρχικά πρέπει $B\neq0\Leftrightarrow-(4x+15)(16x-3)\neq0\Leftrightarrow x\neq-\frac{15}{4}$ και $x\neq\frac{3}{16}$

$\frac{A}{B}=5\Leftrightarrow\frac{x-2}{16x-3}=5\Leftrightarrow x-2=80x-15\Leftrightarrow13=79x\Leftrightarrow x=\frac{13}{79}$

17. α) $x^2+5x+6=0$

$\Delta=5^2-4\cdot1\cdot6=1$, $x_1=\frac{-5+1}{2}=-2$, $x_2=\frac{-5-1}{2}=-3$

β) $-x^2-7x-12=0 \Leftrightarrow x^2+7x+12=0$

$\Delta=7^2-4\cdot1\cdot12=1,\ x_1=\dfrac{-7+1}{2}=-3,\ \ x_2=\dfrac{-7-1}{2}=-4$

γ) $x^2-4x+1=0$

$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot1=12,\quad x_1=\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4+\sqrt{4\cdot3}}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}=2+\sqrt{3},$

$x_1=\dfrac{4-\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4-\sqrt{4\cdot3}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}=2-\sqrt{3}$

δ) $9x^2+12x+4=0$

$\Delta=12^2-4\cdot9\cdot4=0,\quad x=-\dfrac{12}{9}=-\dfrac{4}{3}$

ε) $x^2+3x+3=0$

$\Delta=3^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη

18. α) $x^2+9\ge 6x \Leftrightarrow x^2+9-6x\ge 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\ge 0$ ισχύει

β) $2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2\ge x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-x^2-2xy-y^2\ge 0 \Leftrightarrow$

$x^2-2xy+y^2\ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ ισχύει

19. $x>3 \Leftrightarrow 3x>9$ (1) και $y>4 \Leftrightarrow 4y>16$ (2)

Από (1) +(2) $\Rightarrow 3x+4y>25$

20. α) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{2x+3}{5}>\dfrac{x+5}{4} \Leftrightarrow 20\dfrac{x+1}{2}-20\dfrac{2x+3}{5}>20\dfrac{x+5}{4} \Leftrightarrow 10(x+1)-4(2x+3)>5(x+5) \Leftrightarrow$

$10x+10-8x-12>5x+25 \Leftrightarrow 2x-2>5x+25 \Leftrightarrow -25-2>5x-2x \Leftrightarrow 3x<-27 \Leftrightarrow x<-\dfrac{27}{3}=-9$

β) $\dfrac{x+1}{2}>x-\dfrac{2x+3}{4} \Leftrightarrow 4\dfrac{x+1}{2}>4x-4\dfrac{2x+3}{4} \Leftrightarrow 2(x+1)>4x-(2x+3) \Leftrightarrow$

$2x+2>4x-2x-3 \Leftrightarrow 2x-4x+2x>-3-2 \Leftrightarrow 0>-5$ αδύνατο

21. $-6<2-4x<9 \Leftrightarrow \begin{cases}-6<2-4x\\ 2-4x<9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x<2+6\\ 2-9<4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x<8\\ 4x>-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<2\\ x>-\dfrac{7}{4}\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4}<x<2$

22. α) $\begin{cases}-x+5y=9\\ 3x+4y=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y-9=x\\ 3(5y-9)+4y=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y-9=x\\ 15y-27+4y=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5y-9=x\\ 19y=11+27=38\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10-9=1\\ y=\dfrac{38}{19}=2\end{cases}$

β) $\left\{\begin{array}{l|l}-2x+3y=5 & \cdot3\\ 6x-9y=-3 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+9y=15\\ 6x-9y=-3\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 0=12$ αδύνατο

γ) Θέτουμε $\dfrac{1}{\alpha}=x$ και $\dfrac{1}{\beta}=y$, τότε το σύστημα γίνεται

$\left\{\begin{array}{l|l}x+2y=\dfrac{1}{6} & \cdot(-3)\\ 3x+4y=\dfrac{5}{6} & \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}-3x-6y=-\dfrac{3}{6}\\ 3x+4y=\dfrac{5}{6}\ (1)\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} -2y=\dfrac{2}{6} \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta}=-\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \beta=-6$

Από την $(1) \Rightarrow 3x-\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow 3x=\dfrac{5}{6}+\dfrac{4}{6} \Leftrightarrow 3x=\dfrac{9}{6} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha=2$

23. Επειδή η εξίσωση $x^2+\alpha\chi+\beta=0$ έχει ρίζες τα $\rho_1=2$ και $\rho_2=-1$, ισχύει ότι:

$$\begin{cases}2^2+2\alpha+\beta=0\\(-1)^2+\alpha(-1)+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=-4\\-\alpha+\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=-4\\\alpha-\beta=1\ (1)\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}3\alpha=-3\Leftrightarrow\alpha=-1 \text{ και από}$$

$$(1)\Rightarrow-1-\beta=1\Leftrightarrow\beta=-2$$

24. $\begin{cases}x+2y=5\\2x+4y=10\end{cases}\Bigg|\cdot2\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=10\\2x+4y=10\end{cases}\Leftrightarrow 2x+4y=10\Leftrightarrow\chi=5-2y$ και αφού το $(x_0,\ y_0)$ είναι λύση, ισχύει ότι: $x_0=5-2y_0$. Όμως $3x_0-y_0=1$, άρα

$$3(5-2y_0)-y_0=1\Leftrightarrow15-6y_0-y_0=1\Leftrightarrow-7y_0=-14\Leftrightarrow y_0=2$$

και $x_0=5-2\cdot2=1$

25. Επειδή το σύστημα $\begin{cases}2\lambda x-4y=16\\x+2y=1\end{cases}$ δέχεται σαν λύση το ζεύγος $(x,\ y)=(3,\ -1)$, είναι:

$$\begin{cases}2\lambda\cdot3-4(-1)=16\\3+2(-1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\lambda+4=16\\1=1 \text{ ισχύει}\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=2. \text{ Τότε}$$

$$\begin{cases}2x-6y=13\\4x+y=0\ (1)\end{cases}\Bigg|\cdot6\Leftrightarrow\begin{cases}2x-6y=13\\24x+6y=0\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}26x=13\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ και από την (1) } y=-2.$$

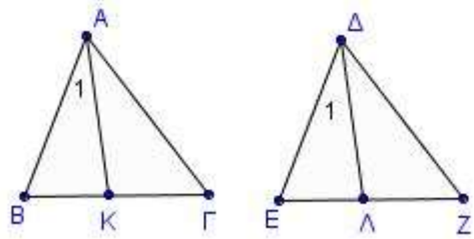
26. α) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΔΕΛ έχουν:

1) ΑΒ = ΔΕ

2) $B=\Gamma$ και

3) $A_1=\Delta_1$ μισά των ίσων γωνιών Α και Δ.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΚ = ΔΛ.

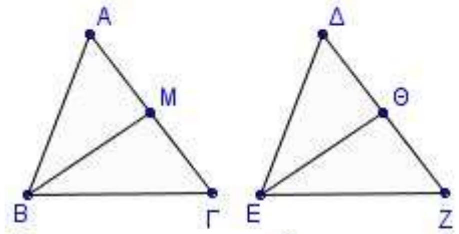


β) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΔΕΘ έχουν:

1) ΑΒ = ΔΕ 2) $A=\Delta$ και

3) ΑΜ = ΔΘ μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και ΔΖ.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΒΜ = ΕΘ



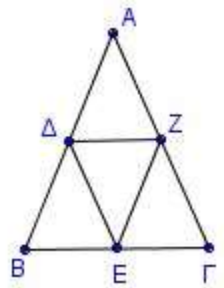
27. Έδτω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ , ΓΑ αντίστοιχα, ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΖΕΓ έχουν:

1) ΒΕ = ΕΓ γιατί το Ε είναι μέσο του ΒΓ

2) ΒΔ = ΓΖ μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ και

3) $B=\Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

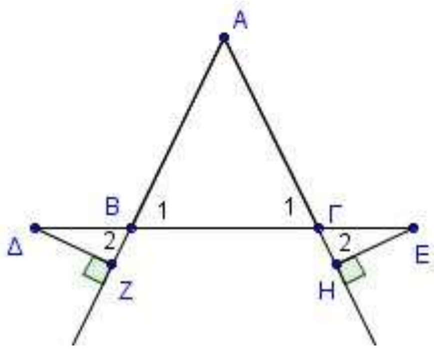
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΔΕ = ΕΖ, οπότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.



28. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΓΗ έχουν:

1) ΔΒ = ΓΕ και 2) $B_2=\Gamma_2$, γιατί $B_2=B_1$, $\Gamma_1=\Gamma_2$ ως κατακορυφήν

και $B_1=\Gamma_1$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου. Τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα. Άρα είναι και ΒΖ = ΓΗ. Επειδή είναι και



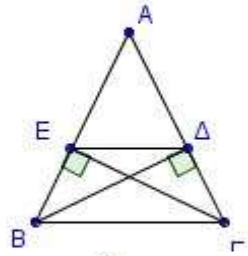
ΑΒ = ΑΓ, θα είναι και ΑΒ + ΒΖ = ΑΓ + ΓΗ $\Leftrightarrow$ ΑΖ = ΑΗ, άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

29. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

1) τη πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $\mathrm{B} = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα. Άρα είναι και ΒΕ = ΔΓ.Επειδή είναι και ΑΒ = ΑΓ, θα είναι και ΑΒ - ΒΖ = ΑΓ - ΓΗ $\Leftrightarrow$ ΑΕ = ΑΔ, άρα το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.



30. α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ έχουν:

1) ΑΜ = ΜΔ 2) ΒΜ = ΜΓ και 3) $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

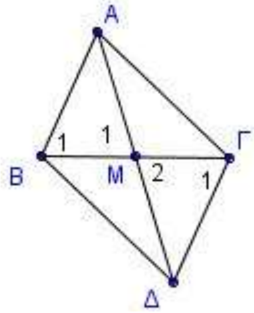
β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα, έχουν και ΑΒ = ΓΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ έχουν:

1) ΒΓ κοινή πλευρά 2) ΑΒ = ΓΔ και

3) $\mathrm{B}_1 = \Gamma_1$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\mathrm{A}}$.

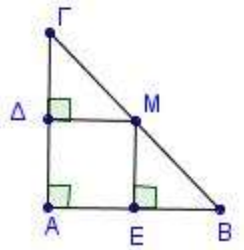


31. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΓ και ΜΕΒ έχουν:

1) ΜΓ = ΜΒ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και

2) ΓΔ = ΕΒ μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα. Άρα είναι και ΜΔ = ΜΕ.



32. $\eta\mu 30^\circ = \dfrac{x}{10} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{10} \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$

$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{x}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$, άρα $\omega = 45^\circ$

$\eta\mu\omega = \dfrac{x}{y} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{y} \Leftrightarrow y\sqrt{2} = 10 \Leftrightarrow y = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

33. α) $\sigma\upsilon\nu x = 1 - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu 60^\circ \overset{0^\circ < x < 180^\circ}{\Rightarrow} x = 60^\circ$,

β) $2\eta\mu x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ \overset{0^\circ < x < 180^\circ}{\Rightarrow} x = 60^\circ$ ή $x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

γ) $\varepsilon\varphi x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\varepsilon\varphi 30^\circ = \varepsilon\varphi\left(180^\circ - 30^\circ\right) = \varepsilon\varphi 150^\circ \overset{0^\circ < x < 180^\circ}{\Rightarrow} x = 150^\circ$

34. $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu\left(180^\circ - 60^\circ\right) = \eta\mu 60^\circ = \sqrt{3}$, $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu\left(180^\circ - 60^\circ\right) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$,

$\varepsilon\varphi 120^\circ = \varepsilon\varphi\left(180^\circ - 60^\circ\right) = -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}$, $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$

$$A = \frac{\eta\mu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ}{2\varepsilon\varphi 120^\circ + \varepsilon\varphi 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{2}}{-2\sqrt{3} + 1} = \frac{\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}}{-\left(2\sqrt{3} - 1\right)} = -\frac{1}{2}$$

35. $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+\left(-\frac{5}{6}\right)^2=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36} \Leftrightarrow \eta\mu\omega=\pm\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Επειδή $90^\circ<\omega<180^\circ$ είναι $\eta\mu\omega>0$, άρα $\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{11}}{6}$, $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}}=-\frac{\sqrt{11}}{5}$

36. $\varepsilon\varphi\omega=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow \eta\mu\omega=-\frac{4}{3}\sigma\upsilon\nu\omega$

$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}\sigma\upsilon\nu\omega\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \Leftrightarrow \frac{16}{9}\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \Leftrightarrow 16\sigma\upsilon\nu^2\omega+9\sigma\upsilon\nu^2\omega=9 \Leftrightarrow$

$25\sigma\upsilon\nu^2\omega=9 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{3}{5}$. Επειδή $90^\circ<\omega<180^\circ$ είναι $\sigma\upsilon\nu\omega<0$, άρα

$\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{3}{5}$. Τότε $\eta\mu\omega=-\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$

$\Pi=10\eta\mu\omega-15\sigma\upsilon\nu\omega+12\varepsilon\varphi\omega=10\frac{4}{5}-15\left(-\frac{3}{5}\right)+12\left(-\frac{4}{3}\right)=8+9-16=1$.

37.α) $\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x=\left(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x\right)\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)=\left(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x\right)\cdot 1=$

$1-\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x=1-2\sigma\upsilon\nu^2x$

β) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}+\frac{1}{\eta\mu^2x}=\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\eta\mu^2x}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\eta\mu^2x}=\frac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x\eta\mu^2x}=\frac{1}{\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x}$

γ) $\left(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x\right)^2+\left(3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x\right)^2=$

$4\eta\mu^2x+\cancel{12\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}+9\sigma\upsilon\nu^2x4\eta\mu^2x-\cancel{12\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}+9\sigma\upsilon\nu^2x=$

$13\eta\mu^2x+13\sigma\upsilon\nu^2x=13\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)=13\cdot 1=13$

δ) $\frac{\overset{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\overset{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu^2\alpha+\left(1-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)^2}{\eta\mu\alpha\left(1-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)}=\frac{\eta\mu^2\alpha+1-2\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\left(1-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)}=\frac{2-2\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha\left(1-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)}=$

$\frac{2\cancel{\left(1-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)}}{\eta\mu\alpha\cancel{\left(1-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)}}=\frac{2}{\eta\mu\alpha}$

Στέλιος Μιχαήλογλου