Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου
Διαγώνισμα διάρκειας 2 ωρών στις Συναρτήσεις

30 – 9 - 2015

ΘΕΜΑ Α

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

1. Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1, είναι και γνησίως μονότονη.

2. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της f.

3. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε και η συνάρτηση $c\cdot f$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, όπου c πραγματικός σταθερός αριθμός.

4. Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση fof ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

5. Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε η gof είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

6. Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν $x\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x)=g(x)$.

7. Αν f περιττή στο $\mathbb{R}$,τότε η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

8. Αν για τις συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ , τότε $f(x)g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ ή $g(x)=0$.

9. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ, τότε $f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow f(x)=\pm g(x)$.

10. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α, β), τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο.

μ 10x2,5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(f(x))=4x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(1)=1$.

μ 5

Β2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να εκφράσετε την f^{-1} συναρτήσει της f.

μ 5

Β3. Αν γνωρίζετε ότι $f(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να βρείτε τα α,β.

μ 6

Β4. Έστω συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(f\circ f\circ g)(x)=4e^x+4x-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $g(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

μ 4

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

μ 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

μ 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$.

μ 4

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(e^{x}\right)-1\right)=0$.

μ 5

Γ4. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

μ 5

Γ5. Αν υπάρχει αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $\left(g^{-1} \circ f\right)(x)=\left(f \circ g^{-1}\right)(x)$.

μ 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda x}{x-2}$, $x \neq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}^{*}$ για την οποία ισχύει ότι: $(f \circ f)(x)=x$ για κάθε $x \neq 2$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\lambda=2$.

μ 4

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x \neq 2$.

μ 5

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(x+1))+f(x+1)=x+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-2}+1$.

μ 6

Δ4. Δίνεται συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(2,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(g(x))+g(x)=e^{x}$ για κάθε $x>2$. Να δείξετε ότι

i. η g αντιστρέφεται.

μ 5

ii. $g^{-1}(x)=2\ln x-\ln(x-2)$

μ 5

Καλή Επιτυχία

Στέλιος Μιχαήλογλου

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1. Λ 2. Λ 3. Λ 4. Σ 5. Λ 6. Λ 7. Σ 8. Λ 9. Λ 10. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x=1$ είναι $f(f(1))=4\cdot 1-3=1$ και για $x=f(1)$ είναι

$$f\Big(\underbrace{f(f(1))}_{1}\Big)=4f(1)-3\Leftrightarrow f(1)=4f(1)-3\Leftrightarrow 3f(1)=3\Leftrightarrow f(1)=1.$$

Β2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε

$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow 4x_1-\not{3}=4x_2-\not{3}\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f\ 1-1$.

Θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε: $f(y)=4x-3\Leftrightarrow 4x=f(y)+3\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}(f(y)+3)$, άρα

$f^{-1}(y)=\frac{1}{4}(f(y)+3)$, $y\in\mathbb{R}$ οπότε και $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(f(x)+3)$, $x\in\mathbb{R}$

Β3. Είναι $f(f(x))=\alpha f(x)+\beta=\alpha(\alpha x+\beta)+\beta=\alpha^2x+\alpha\beta+\beta$. Όμως $f(f(x))=4x-3$, άρα πρέπει $\alpha^2x+\alpha\beta+\beta=4x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν $\begin{cases}\alpha^2=4\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm 2\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases}$.

Αν $\alpha=2$ τότε $2\beta+\beta=-3\Leftrightarrow 3\beta=-3\Leftrightarrow\beta=-1$ και $f(x)=2x-1$.

Αν $\alpha=-2$ τότε $-2\beta+\beta=-3\Leftrightarrow-\beta=-3\Leftrightarrow\beta=3$ και $f(x)=-2x+3$.

Β4. i. Αν στη σχέση $f(f(x))=4x-3$ αντικαταστήσουμε όπου x το $g(x)$ προκύπτει:

$f(f(g(x)))=4g(x)-3$. Όμως $f(f(g(x)))=4e^x+4x-7$, άρα

$4g(x)-3=4e^x+4x-7\Leftrightarrow 4g(x)=4e^x+4x-4\Leftrightarrow g(x)=e^x+x-1$.

ii. Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow$
$g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)=0$ και για κάθε $x<0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ (1), τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y$ και η αρχική σχέση γίνεται: $y^3+y=2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(y^3+y)$ άρα

$f^{-1}(y)==\frac{1}{2}(y^3+y),\ y\in\mathbb{R}$, οπότε και $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x^3+x),\ x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0)=0$ άρα $f(f^{-1}(0))=f(0)\Leftrightarrow 0=f(0)$ και

$f^{-1}(1)=1$ άρα $f(f^{-1}(1))=f(1)\Leftrightarrow 1=f(1)$.

Γ3. $f(f^{-1}(e^x)-1)=0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(e^x)-1)=f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}(e^x)-1=0 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(e^x)=1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(e^x))=f(1) \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Γ4. Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, για να είναι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} αρκεί η C_f να βρίσκεται πάνω από την $y=x$, δηλαδή:

$f(x)>x \Leftrightarrow f^3(x)>x^3$, οπότε και

$f^3(x)+f(x)>x^3+x \Leftrightarrow 2x>x^3+x \Leftrightarrow$

$x^3-x<0 \Leftrightarrow x(x^2-1)<0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
x	–		–	0	+		+	
x^2-1	+	0	–		–	0	+	
Γ	–	0	+	0	–	0	+	

Γ5. Είναι $f(g(x))=g(f(x)) \Leftrightarrow g^{-1}(f(g(x)))=g^{-1}(g(f(x)))\Leftrightarrow$

$g^{-1}(f(g(x)))=(g^{-1}\circ g)(f(x))\Leftrightarrow g^{-1}(f(g(x)))=f(x)$ και αν αντικαταστήσουμε όπου x το $g^{-1}(x)$, έχουμε:

$g^{-1}(f(g(g^{-1}(x))))=f(g^{-1}(x))\Leftrightarrow g^{-1}(f(x))=f(g^{-1}(x))$, δηλαδή $(g^{-1}\circ f)(x)=(f\circ g^{-1})(x)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \frac{\lambda x}{x-2}\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \lambda x\neq 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ (\lambda-2)x\neq -4 \end{cases} \quad (1)$$

Αν $\lambda\neq 2$, τότε $\begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq \frac{-4}{\lambda-2} \end{cases}$, οπότε η σχέση $(f\circ f)(x)=x$ δεν ισχύει για κάθε $x\neq 2$.

Αν $\lambda=2$, τότε από την (1) έχουμε: $\begin{cases} x\neq 2 \\ 0\neq -4 \ \ \text{ισχύει} \end{cases}$, άρα $A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{2\}$. Τότε

$$f(x)=\frac{2x}{x-2} \text{ και } (f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2\frac{2x}{x-2}}{\frac{2x}{x-2}-2}=\frac{\frac{4x}{x-2}}{\frac{2x-2x+4}{x-2}}=\frac{4x}{4}=x$$

Δ2. Έστω $x_1,x_2\neq 2$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε

$\frac{2x_1}{x_1-2}=\frac{2x_2}{x_2-2}\Leftrightarrow 2x_1x_2-4x_1=2x_1x_2-4x_2\Leftrightarrow -4x_1=-4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1 – 1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{2x}{x-2}=y\Leftrightarrow 2x=xy-2y\Leftrightarrow 2y=xy-2x\Leftrightarrow x(y-2)=2y$ (2).

Αν $y=2$, τότε η (2) γίνεται $0=4$ και είναι αδύνατη.

Αν $x=2$, τότε και πάλι η (2) είναι αδύνατη.

Αν $y\neq 2$ τότε $x=\frac{2y}{y-2}$ δηλαδή $f^{-1}(y)=\frac{2y}{y-2}$, $y\neq 2$, άρα $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-2}=f(x)$, $x\neq 2$

Δ3. Επειδή $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\neq 2$, είναι $f(f(x+1))=x+1$ με $x+1\neq 2\Leftrightarrow x\neq 1$.

$f(f(x+1))+f(x+1)=x+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-2}+1\Leftrightarrow x+1+f(x+1)=x+f(e^{-x})+1\Leftrightarrow$

$f(x+1)=f(e^{-x})\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x+1=e^{-x}\Leftrightarrow e^{-x}-x-1=0$ (3) με $e^{-x}\neq 2\Leftrightarrow -x\neq \ln 2\Leftrightarrow x\neq -\ln 2$.

Έστω $h(x)=e^{-x}-x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $-x_1>-x_2$ (4) και $e^{-x_1}>e^{-x_2}$ (5)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) έχουμε:

$e^{-x_1}-x_1>e^{-x_2}-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}-x_1-1>e^{-x_2}-x_2-1\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)\Rightarrow h\searrow\mathbb{R}\Rightarrow h\ 1-1$

$(3)\Rightarrow h(x)=h(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$ δεκτή.

Δ4. i. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$, τότε $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ και

$f(g(x_1))+g(x_1)=f(g(x_2))+g(x_2)\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow g\ 1-1$ και αντιστρέφεται.

ii. $g(x)=y\Rightarrow f(y)+y=e^x\Leftrightarrow \frac{2y}{y-2}+y=e^x\Leftrightarrow e^x=\frac{y^2}{y-2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{y^2}{y-2}$, άρα

$g^{-1}(y)=\ln\frac{y^2}{y-2},\ y>2$, οπότε

$g^{-1}(x)=\ln\frac{x^2}{x-2}=\ln x^2-\ln(x-2)=2\ln x-\ln(x-2),\ x>2$