14η Άσκηση

Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Έστω ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ έχει ρίζες τα $x_1=4-2\sqrt{3}$ και $x_2=4+2\sqrt{3}$.

α) Να δείξετε ότι $\beta=-2\gamma$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^2-8x+4=0$.

γ) Να δείξετε ότι $\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=2$.

Έστω α = 1

δ) Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τα $\rho_1=x_1^3$ και $\rho_2=x_2^3$.

ε) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}=2$.

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^2-8x+1=0$ έχει ρίζες τα $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

ζ) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $x^2-\left(x_1+x_2\right)^2=0$ **ii.** $x^{x_1+x_2}+x=0$ **iii.** $\left(x+1\right)^3=2\left(x_1+x_2\right)\left(x_1x_2\right)$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Από τους τύπους Vieta γνωρίζουμε ότι

$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 4 - \cancel{2\sqrt{3}} + 4 + \cancel{2\sqrt{3}} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 8 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = -8\alpha$ (1) και

$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \left(4 - 2\sqrt{3}\right)\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 16 - 12 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = 4 \Leftrightarrow \gamma = 4\alpha$ (2)

Από (1),(2) είναι $\beta = -8\alpha = -2 \cdot 4\alpha = -2\gamma$.

β) 1ος τρόπος

Είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 - 8\alpha x + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(x^2 - 8x + 4\right) = 0 \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 8x + 4 = 0$

2ος τρόπος

Από τους τύπους Vieta γνωρίζουμε ότι κάθε εξίσωση 2ου βαθμού έχει τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$ με

$S = x_1 + x_2 = 4 - \cancel{2\sqrt{3}} + 4 + \cancel{2\sqrt{3}} = 8$ και $P = x_1 x_2 = \left(4 - 2\sqrt{3}\right)\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16 - 12 = 4$,

επομένως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$

γ) $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1} - \sqrt{3 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1} =$

$\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1} - \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} =$

$\left|\sqrt{3} + 1\right| - \left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} + 1 - \left(\sqrt{3} - 1\right) = \cancel{\sqrt{3}} + 1 - \cancel{\sqrt{3}} + 1 = 2$

δ) Για α = 1 η εξίσωση είναι η $x^2 - 8x + 4 = 0$.

Η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τα ρ_1, ρ_2 , έχει άθροισμα ριζών:

$S' = \rho_1 + \rho_2 = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right) = 8\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2 - x_1 x_2\right] =$

$= 8\left(8^2 - 3 \cdot 4\right) = 8 \cdot 52 = 416$ και γινόμενο ριζών: $P = \rho_1 \rho_2 = x_1^3 x_2^3 = \left(x_1 x_2\right)^3 = 4^3 = 64$, οπότε η

ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2 - 416x + 64 = 0$

ε) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2} = \sqrt[3]{2x_1 x_2} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

στ) Το $\frac{1}{x_1}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $4x^2 - 8x + 1 = 0$, αν και μόνο αν

$4\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 - 8\frac{1}{x_1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x_1^2} - \frac{8}{x_1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \cancel{x_1^2}\frac{4}{\cancel{x_1^2}} - x_1^{\cancel{2}}\frac{8}{\cancel{x_1}} + x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 8x_1 + 4 = 0$ που ισχύει.

Όμοια για το $\frac{1}{x_2}$.

ζ) i. $x^2 - \left(x_1 + x_2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8^2 \Leftrightarrow x = \pm 8$

ii. $x^{x_1 x_2} + x = 0 \Leftrightarrow x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^3 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\left(x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1\right)$

iii. $\left(x + 1\right)^3 = 2\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1 x_2\right) \Leftrightarrow \left(x + 1\right)^3 = 2 \cdot 8 \cdot 4 \Leftrightarrow \left(x + 1\right)^3 = 64 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = 4 - 1 = 3$