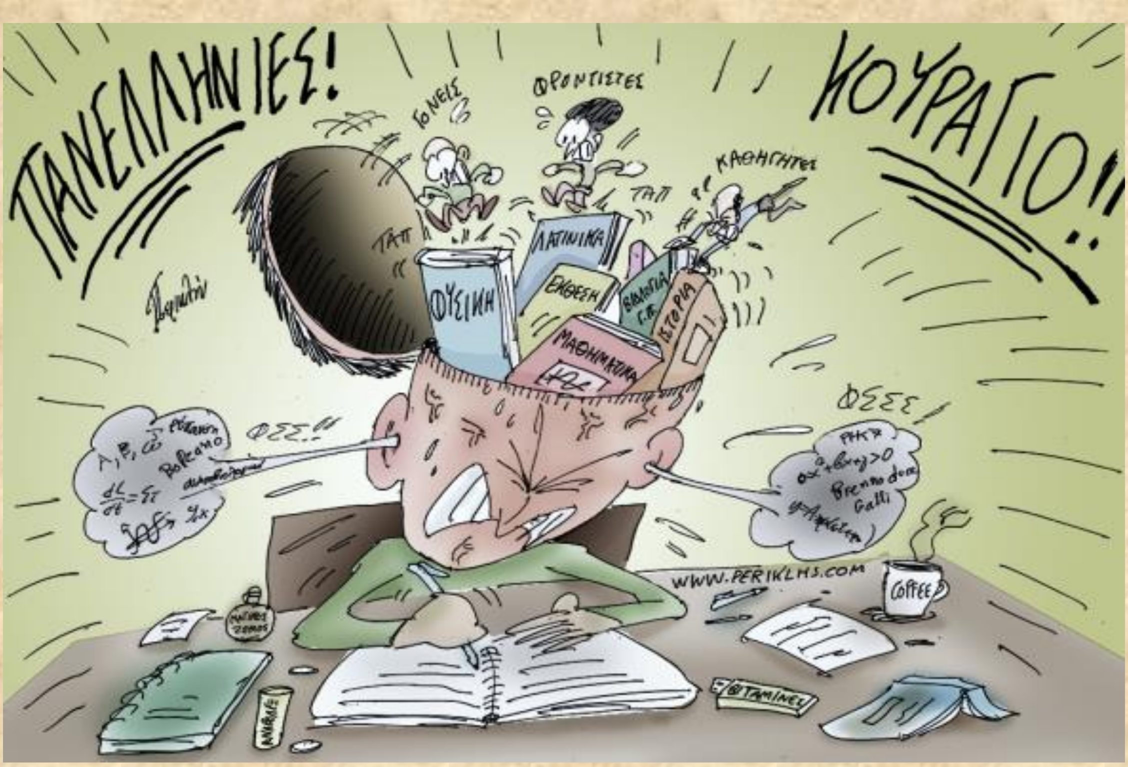
ΤΕΛΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

10 Επαναληπτικές Ασκήσεις από την ομάδα του Askisopolis

για τις πανελλαδικές του 2023

Δεύτε τελευταίον ασπασμόν!



Αντώνης Βαλέργας
Αποστόλης Κακαβάς
Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας
Ισαάκ Χιονίδης

www.askisopolis.gr

Εκφωνήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x+x$ με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της.

ii) **α)** Να δείξετε ότι $f(x)<2x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και

β) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(2x)=x$

i) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>\frac{x}{2}$.

ii) Να υπολογίσετε τα :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)-2x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)}{f(x)-2x}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2f^{-1}(x)}$ με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ln x$, $x>0$ και έστω F μια παράγουσα της.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)-2022)=1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F(e^x)-F\left(\frac{1}{x}\right)=\eta\mu\frac{1}{x}-\eta\mu e^x, x>0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

δ) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και να γίνει η γραφική παράσταση της f.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $A(2,f(2))$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

3. Έστω F αρχική συνάρτηση της $f(x)=e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $e^{\xi^2}=\int_0^1 e^{x^2}dx$.

β) Να μελετηθεί η F ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $F(x)=x+F(0)$.

δ) Να δειχθεί ότι για κάθε $t\in\mathbb{R}$, $x\in[0,1]$ ισχύουν:

i. $t^2e^{-2x^2}-2t+e^{2x^2}\geq 0$.

ii. $\int_0^1 e^{-2x^2}dx\geq\frac{1}{\int_0^1 e^{2x^2}dx}$.

4. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες δίνονται :

- η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,
- $f(x)=g(x)+2e^x$,
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 4 και
- η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0=0$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(0,g(0))$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)g(x)+2\eta\mu x}{x^2}$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=k$ με $k\in\mathbb{R}$ τότε:

i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{e^x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

5. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x & ,\text{αν } x>0 \\ \kappa & ,\text{αν } x=0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι κ =0.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{\alpha}{x}}=x$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
ε) Να δείξετε ότι $5^{10}<3^3\cdot 7^7$
στ) Αν $f(x)+\beta\ge\beta x$ για κάθε $x>0$ να βρείτε την τιμή του $\beta\in\mathbb{R}$
ζ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{x^2\ln x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+c$, $x\in(0,+\infty)$ και $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$.
η) Να βρείτε τις παράγουσες της f.
θ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα των x.

6. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού $F:(-6,2)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- F αρχική της πολυωνυμικής συνάρτησης $f:(-6,2)\to\mathbb{R}$.
- $F(x-1)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\alpha$
- $F(x)\le F(-4)$ για κάθε $x\in(-6,2)$
- Για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(x_0,f(x_0))$, $x_0\in(-6,2)$ της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
β) Να δείξετε ότι $\alpha=3,\beta=-9$.
γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3x^2+12x$, $x\in(-6,2)$
δ) Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{F(-x-3)-F(x-1)-32}{x^2-2x+1}$ είναι καλώς ορισμένο και να το υπολογίσετε .
ε) Έστω τα σημεία $A(\alpha,0)$, $\alpha\in(-4,-2)$, $\Delta(\alpha,f(\alpha))$, Β και Γ τα συμμετρικά των Α και Δ αντίστοιχα ω ς προς την ευθεία $x=-2$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\in(-4,-2)$ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι μέγιστο.
στ) Να δείξετε ότι $-2(1-e^{-4})\le\int_{e^{-4}}^{1}F(\ln x)\le 30\left((1-e^{-4}\right)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής , για την οποία ισχύει ότι:

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $-\dfrac{1}{2023}$ για $x=1$ και για $x=4$,
- $f(-1)=\dfrac{1}{2023}$
- Η $G(x)=\dfrac{1}{\alpha}\cdot e^{-2023\cdot f(x)}$ είναι παράγουσα της g και

- $\int_{-1}^{1} x^2 g(x^3)dx = -\frac{1}{2023}\cdot\frac{e^2-1}{3e}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2023$ και στη συνέχεια ότι $g(x) = e^{-2023\cdot f(x)}\cdot f\,'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

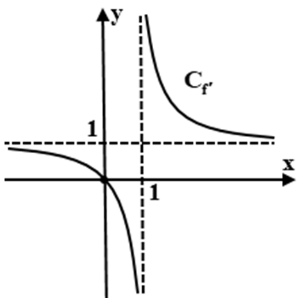
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει τρία τουλάχιστον κοινά σημεία με τον άξονα x΄x .

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = f\,''(x) - 2023\cdot\left(f\,'(x)\right)^2$ δεν είναι 1-1.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^4 G(x)dx \ge -\frac{3e}{2023}$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_1^4 x\cdot g(x)dx \le 0$.

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι:



- $f(0)=-1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- Η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες για κάθε $\lambda<-1$
- Η C_f έχει στο $-\infty$ και στο $+\infty$ ασύμπτωτη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)<f'(-1)x+f'(-1)+f(1)$ για κάθε $x<-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

γ) Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i) $\int_{-1}^{0} f(x)dx<\frac{f'(-1)+2f(1)}{2}$ **ii)** $\int_{\alpha}^{0} f(x)dx<\alpha$ για κάθε $\alpha<0$

δ) Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x.

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να την χαράξετε.

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει :
$f^3(x)+f^2(x)+f(x)=3x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Με δεδομένο ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$, να αποδείξετε ότι

β) η ευθεία $y=\frac{1}{2}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

γ) υπάρχει ένα ακριβώς $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)}{3}$**.**

δ) υπάρχει ένα ακριβώς $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+2023$.

ε) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.

στ) $\int_0^1 f(x)dx\le 2$ αφού αποδείξετε ότι $\frac{1}{f^2(x)+f(x)+1}\le\frac{4}{3}$**.**

ζ) **i.** $xf'(x)\le f(x)\le 3x$ για κάθε $x\in[0,1]$**.**

ii. $\frac{1}{2}<E<\frac{3}{2}$**,** όπου E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=0, x=1$ και τον άξονα x΄x.

η) i. $h(0)=0$ **,** όπου h συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-f(x)}{x}=2023$$

ii. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{h(x)+\eta\mu 3x+e^x+x-1}{x}=2027+e$.

10. Έστω οι συναρτήσεις $\varphi(x)=\sqrt{x-1}$ και $\kappa(x)=-\ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της φ δεν βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της κ.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=\varphi\circ\kappa$.

γ) Αν $h(x)=\varphi(\kappa(x))=\sqrt{-\ln x-1}$, $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$, να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ, κ και την ευθεία y = 1.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=-\dfrac{\varphi^2(x)}{\kappa(x)}$, $x>1$ είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Έστω F αρχική της f στο $(1,+\infty)$ με $F(e)=e^2-e$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο της (e, F(e)).

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 F(x)dx>6e-6$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to e}\dfrac{1}{F(x)-(e-1)x}=+\infty$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F(x)=2023$ έχει ακριβώς μία λύση αν γνωρίζετε ότι το $\lim_{x\to 1^+}F(x)$ υπάρχει.

Παρουσίαση ασκήσεων

1. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\text{εφ}x+x$ με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της.

ii) α) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)<2x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και

β) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(2x)=x$

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(x\right)>\frac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

iv) Να υπολογίσετε τα :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)-2x}$, **β)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)}{f(x)-2x}$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2f^{-1}(x)}$ με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

Λύση

i) $f'\left(x\right)=\frac{1}{\text{συν}^2x}+1>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Η f ως συνεχής (άθροισμα συνεχών) και γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχει σύνολο τιμών το

$(\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ αφού $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(\text{εφ}x+x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(\text{ημ}x\frac{1}{\text{συν}x}+x)=-\infty$

(4^o τεταρτημόριο όπου συνx>0, $\text{ημ}(-\frac{\pi}{2})=-1$) και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\text{εφ}x+x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\text{ημ}x\frac{1}{\text{συν}x}+x)=+\infty$

(1^o τεταρτημόριο όπου συνx >0, $\text{ημ}(\frac{\pi}{2})=1$).

Άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης της f είναι το $\mathbb{R}$.

ii) α) Θέτουμε h(x)=f(x)-2x=εφx -x με $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ τότε $h'(x)=\frac{1}{\text{συν}^2x}-1=\frac{1-\text{συν}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}\geq 0$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για x=0 , η h είναι συνεχής άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Επομένως Για $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ έχουμε $h\left(x\right)<h\left(0\right)\Rightarrow h(x)<0\Rightarrow f\left(x\right)<2x$

β) Για να ισχύει $f^{-1}(2x)=x$ πρέπει: $2x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ και για να έχει λύση η ισότητα, πρέπει το x να ανήκει στο σύνολο τιμών της f^{-1} άρα $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ οπότε : $f^{-1}(2x)=x\Leftrightarrow 2x=f(x)\Leftrightarrow h(x)=0$

$\Leftrightarrow h(x)=h(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

iii) Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι $\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{x}{2}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\right\}=\left(-\pi,\pi\right)$.

Για $x\in(-\pi,\pi)$ έχουμε: $f^{-1}(x)>\frac{x}{2}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>f(\frac{x}{2})$.

Θέτουμε $\frac{x}{2}=\omega$, $-\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{\pi}{2}$ οπότε

$2\omega>f(\omega)\Leftrightarrow h(\omega)<0\Leftrightarrow h(\omega)<h\left(0\right)\Leftrightarrow\omega\in(-\frac{\pi}{2},0)\Leftrightarrow x\in(-\pi,0)$.

iv) α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f(x)-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x+x}{\varepsilon\varphi x-x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+1}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}]=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{f(x)}{f(x)-2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\varepsilon\varphi x+x}{\varepsilon\varphi x-x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+1}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=1$

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Rightarrow f(f^{-1}(x_1))<f(f^{-1}(x_2))\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ οπότε η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα $f^{-1}(A_{f^{-1}})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x))=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)=A_f$.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=\omega$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\omega=\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}$ επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2f^{-1}(x)}=\lim_{\omega\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\omega)}{f(\omega)-2\omega}=1.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ln x$, $x>0$ και έστω F μια παράγουσα της.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)-2022)=1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F(e^x)-F\left(\dfrac{1}{x}\right)=\eta\mu\dfrac{1}{x}-\eta\mu e^x, x>0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

δ) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και να γίνει η γραφική παράσταση της f.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $A(2,f(2))$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $D_f=(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων στο $(0,+\infty)$ συναρτήσεων με: $f'(x)=(e^{x-1}-\ln x)'=(e^{x-1})'-(\ln x)'=e^{x-1}(x-1)'-\dfrac{1}{x}=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$.

Η συνάρτηση f' είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων στο $(0,+\infty)$ συναρτήσεων με: $f''(x)=(f'(x))'=\left(e^{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)'=(e^{x-1})'-\left(\dfrac{1}{x}\right)'=e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}, x\in(0,+\infty)$.

Ισχύει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Εφόσον η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ με $f'(1)=0$. Έτσι: $0<x<1\Rightarrow f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$, ενώ για $x>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Συνεπώς η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1$.

Επίσης:

● για κάθε $x\in A_1=(0,1]$, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,1]$, οπότε:

$f(A_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=[1,+\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}(e^{x-1})=e^{-1}$ και έτσι:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^{x-1}-\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^{x-1})-\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=e^{-1}-(-\infty)=+\infty$.

● για κάθε $x\in A_2=(1,+\infty)$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=(1,+\infty)$, οπότε

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(1,+\infty)$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}\cdot\left(1-\frac{\ln x}{e^{x-1}}\right)\right)=(+\infty)\cdot1=+\infty$

(είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{x-1}}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot e^{x-1}}=0$).

Η συνάρτηση $Q(x)=f\left(f(x)-2022\right)$ ορίζεται στο σύνολο :

$D_Q=\left\{x\in D_f:(f(x)-2022)\in D_f\right\}=\left\{x\in(0,+\infty):f(x)>2022\right\}$.

- Το $2022\in f(A_1)=[1,+\infty)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1, οπότε η εξίσωση $f(x)=2022$ έχει μοναδική λύση x_1 στο $A_1=(0,1]$.

  Επομένως $f(x)>2002\Leftrightarrow f(x)>f(x_1)\overset{f\searrow A_1}{\Leftrightarrow}x<x_1$.

  Για κάθε $0<x<x_1$ ισχύει $f\left(f(x)-2022\right)=f(1)\overset{f\searrow A_1}{\Leftrightarrow}f(x)-2022=1\Leftrightarrow f(x)=2023.$

  Το $2023\in f\left((0,x_1)\right)=\left(f(x_1),+\infty\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1, οπότε η εξίσωση $f(x)=2023$ έχει μοναδική λύση στο $(0,x_1)$.

- $2022\in f(A_2)=(1,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=(1,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=2022$ έχει μοναδική λύση x_2 στο $A_2=(1,+\infty)$.

  Επομένως $f(x)>2022\Leftrightarrow f(x)>f(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>x_2$.

  Για κάθε $x>x_2$ ισχύει $f\left(f(x)-2022\right)=f(1)\overset{f\nearrow A_2}{\Leftrightarrow}f(x)-2022=1\Leftrightarrow f(x)=2023.$

  Το $2023\in f\left((x_1,+\infty)\right)=\left(f(x_1),+\infty\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1, οπότε η εξίσωση $f(x)=2023$ έχει μοναδική λύση στο $(x_1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=2023\Leftrightarrow f\left(f(x)-2022\right)=1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=F(x)+\eta\mu x$ που είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $D_g=D_{g'}=(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων , με:

$g'(x)=F'(x)+\sigma\upsilon\nu x=f(x)+\sigma\upsilon\nu x$.

Ωστόσο,

- $f(x)\geq f(1)=1$, για κάθε $x>0$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για x=1,
- $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq1$, άρα $-1+1\leq\sigma\upsilon\nu x+f(x)\Rightarrow g'(x)\geq0$, $x>0$.

Αν ήταν $g'(x)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x+f(x)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-f(x)$

Αλλά $-f(x)\leq-1$ και $-f(x)=-1\Leftrightarrow x=1$ ενώ $\sigma\upsilon\nu x\geq-1$ και $\sigma\upsilon\nu x=-1\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}$

με $(2k+1)\pi\neq1,\forall k\in\mathbb{Z}$,οπότε $g'(x)>0,\forall x>0$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1» για κάθε x>0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ με $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{x},x>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$,για κάθε x>0 , δηλαδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ ισχύει:

$\varphi(D_f)=\varphi\left((0,+\infty)\right)\overset{\varphi\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=1-(+\infty)=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$.Τότε:

$F(e^x)-F\left(\frac{1}{x}\right)=\eta\mu\frac{1}{x}-\eta\mu e^x\Leftrightarrow F(e^x)+\eta\mu e^x=F\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu\frac{1}{x}\overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow}g(e^x)=g\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{x}$

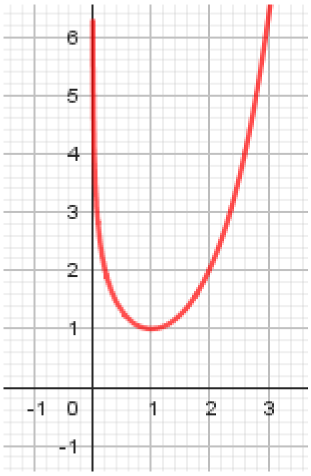
$\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$.

Αφού $0 \in \varphi\left(D_f\right) = IR$ και η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$, η εξίσωση φ(x)=0 έχει μοναδική ρίζα.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x-1} - \ln x\right) = +\infty$, άρα η ευθεία με εξίσωση x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
Συγκεντρώνοντας όλα τα προηγούμενα συμπεράσματα σε ένα πίνακα μεταβολών.

x	0	1	+∞
f΄΄	+		+
f΄	−	0	+
f	↘		↗

Με την βοήθεια του διπλανού πίνακα και της κατακόρυφης ασύμπτωτης σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



ε) Έχουμε ότι:

- $f(2) = e - \ln 2$ και $f'(2) = e - \frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι:

$$y - \left(e - \ln 2\right) = \left(e - \frac{1}{2}\right)\left(x - 2\right) \Leftrightarrow y = \left(e - \frac{1}{2}\right)x - e + 1 - \ln 2$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left(0,+\infty\right)$, οπότε οποιαδήποτε εφαπτομένη βρίσκεται κάτω από την C_f, εκτός από το σημείο επαφής , δηλαδή

- $f\left(x\right) \geq \left(e - \frac{1}{2}\right)x - e + 1 - \ln 2$ για $x > 0$ και
-
- $f\left(x\right) = \left(e - \frac{1}{2}\right)x - e + 1 - \ln 2 \Leftrightarrow x = 2$

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_1^2 \left| f(x) - \left(e - \frac{1}{2}\right)x + e - 1 + \ln 2 \right| dx = \int_1^2 \left[f(x) - \left(e - \frac{1}{2}\right)x + e - 1 + \ln 2 \right] dx =$$

$$= \left[e^{x-1} - \left(x\ln x - x\right) - \left(e - \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + ex - x + x\ln 2 \right]_1^2 = e - \left(2\ln 2 - 2\right) - 2\left(e - \frac{1}{2}\right) + 2e - 2 + 2\ln 2 -$$

$$- \left[1 - (-1) - \left(e - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + e - 1 + \ln 2 \right] = \left(-\ln 2 + \frac{e}{2} - \frac{1}{4}\right) \text{τ.μ}$$

3. Έστω F αρχική συνάρτηση της $f(x)=e^{x^2}, x\in\mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $e^{\xi^2}=\int_0^1 e^{x^2}dx$.

β) Να μελετηθεί η F ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $F(x)=x+F(0)$.

δ) Να δειχθεί ότι $\forall t\in\mathbb{R}, x\in[0,1]$ ισχύουν :

i. $t^2e^{-2x^2}-2t+e^{2x^2}\ge 0$.

ii. $\int_0^1 e^{-2x^2}dx \ge \dfrac{1}{\int_0^1 e^{2x^2}dx}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $F'(x)=f(x)=e^{x^2}$ οπότε από το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(1)-F(0)}{1-0}\Leftrightarrow e^{\xi^2}=F(1)-F(0)$ (1).Αλλά επειδή η F είναι αρχική συνάρτηση της $f(x)=e^{x^2}$ έχουμε ότι $\int_0^1 e^{x^2}dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)$ (2). Από (1),(2) έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $e^{\xi^2}=\int_0^1 e^{x^2}dx$.

β) Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=f(x)=e^{x^2}$ και η F' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F''(x)=f'(x)=2xe^{x^2}$.Έχουμε $F''(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 2xe^{x^2}=0\overset{e^{x^2}>0}{\Leftrightarrow}x=0$,

$F''(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>0\Leftrightarrow 2xe^{x^2}>0\overset{e^{x^2}>0}{\Leftrightarrow}x>0$ και $F''(x)<0\Leftrightarrow f'(x)<0\Leftrightarrow 2xe^{x^2}<0\overset{e^{x^2}>0}{\Leftrightarrow}x<0$.Οπότε η F ως συνεχής στο 0 είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0]$, κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής N(0,F(0)).

γ) 1^ος τρόπος:

Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο καμπής N(0,F(0)) έχει εξίσωση

(ε): $y-F(0)=F'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+F(0)$

Η F είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0]$, κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$ οπότε ισχύουν:

- C_F κάτω από (ε) στο $(-\infty,0)\Leftrightarrow F(x)<y$ στο $(-\infty,0)\Leftrightarrow F(x)<x+F(0)$ στο $(-\infty,0)$
- C_F πάνω από (ε) στο $(0,+\infty)\Leftrightarrow F(x)>y$ στο $(0,+\infty)\Leftrightarrow F(x)>x+F(0)$ στο $(0,+\infty)$
- Η (ε) διαπερνά τη C_F στο σημείο καμπής το οποίο είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο $\Leftrightarrow$ $F(x)=y$ στο $x_0=0\Leftrightarrow F(x)=x+F(0)$ στο $x_0=0$

Οπότε: $F(x)=x+F(0)\Leftrightarrow x=0$.

2^ος τρόπος:

Έστω η συνάρτηση: $g(x)=F(x)-x-F(0)$, $x\in\mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f(x)-1=e^{x^2}-1$.

Ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ ότι $x^2\ge 0\overset{e^t\nearrow}{\Leftrightarrow}e^{x^2}\ge e^0\Leftrightarrow e^{x^2}\ge 1\Leftrightarrow e^{x^2}-1\ge 0\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$ και

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-1=0 \Leftrightarrow e^{x^2}=1 \Leftrightarrow e^{x^2}=e^0 \overset{e^t\,1-1}{\Leftrightarrow} x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.Η g' μηδενίζεται μόνο στο μεμονωμένο σημείο $x=0$,η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=F(0)-0-F(0)=0$,κατά συνέπεια μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x)=0 \Leftrightarrow$ $F(x)=x+F(0)$ είναι η $x=0$.

δ) i. $\forall t\in\mathbb{R}, x\in[0,1]$ ισχύει ότι : $t^2e^{-2x^2}-2te^{-x^2}e^{x^2}+e^{2x^2}=\left(te^{-x^2}-e^{x^2}\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow t^2e^{-2x^2}-2t+e^{2x^2}\ge 0.$

ii. Επομένως $\int_0^1\left(t^2e^{-2x^2}-2t+e^{2x^2}\right)dx\ge 0 \Leftrightarrow t^2\int_0^1 e^{-2x^2}dx-2t\int_0^1 dx+\int_0^1 e^{2x^2}dx\ge 0 \Leftrightarrow$

$t^2\int_0^1 e^{-2x^2}dx-2t[x]_0^1+\int_0^1 e^{2x^2}dx\ge 0 \Leftrightarrow t^2\int_0^1 e^{-2x^2}dx-2t+\int_0^1 e^{2x^2}dx\ge 0 \ (1)$

Η σχέση (1) ισχύει $\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta\le 0 \Leftrightarrow 4-4\int_0^1 e^{-2x^2}dx\cdot\int_0^1 e^{2x^2}dx\le 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 e^{-2x^2}dx\cdot\int_0^1 e^{2x^2}dx\ge 1 \overset{:\int_0^1 e^{2x^2}dx>0}{\Leftrightarrow} \int_0^1 e^{-2x^2}dx\ge\frac{1}{\int_0^1 e^{2x^2}dx}.$$

4. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες δίνονται :

- η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,
- $f(x)=g(x)+2e^x$,
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 4 και
- η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0=0$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(0,g(0))$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)g(x)+2\eta\mu x}{x^2}$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=k$ με $k\in\mathbb{R}$ τότε:

i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{e^x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Λύση

α) Αν στη σχέση (1) $f(x)=g(x)+2e^x$ θέσουμε $x=0$ έχουμε $f(0)=g(0)+2 \Leftrightarrow 4=g(0)+2 \Leftrightarrow$ $g(0)=2$. Επίσης παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $f'(x)=g'(x)+2e^x$ οπότε $f'(0)=g'(0)+2$ (2).
Γνωρίζουμε ότι η f έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x_0=0$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη , συνεπώς από τον θεώρημα Fermat είναι $f'(0)=0$ οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει $g'(0)=-2$. Επομένως, η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(0,g(0))$ είναι $y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-2=-2x \Leftrightarrow y=-2x+2$.

β) Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\eta\mu x$ οπότε το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x\cdot g(x)+2\eta\mu x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\eta\mu x}{x}\frac{g(x)-2}{x}\right)=-1\cdot g'(0)=2$$

γ) i. Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=k\in\mathbb{R}$ και $f(x)=g(x)+2e^x \Leftrightarrow g(x)=f(x)-2e^x \Leftrightarrow \frac{g(x)}{e^x}=\frac{f(x)}{e^x}-2$.

Επομένως $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\frac{1}{e^x}-2\right)=k\cdot 0-2=-2$.

ii) Είναι $g(x)=f(x)-2e^x$ και $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2e^x\right)=-\infty$,οπότε υπάρχει $\alpha\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(\alpha)<0$. Επίσης $g(0)=f(0)-2=2>0$ οπότε $g(\alpha)\cdot g(0)<0$.Η g είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

δ) Είναι $f(x)-g(x)=2e^x>0$ οπότε η C_f είναι πάνω από τη C_g .Άρα

$$E(\Omega)=\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^1 2e^x dx=2\left[e^x\right]_0^1=2e-2.$$

5. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x & ,\alpha\nu\ x>0\\ \kappa & ,\alpha\nu\ x=0\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι κ = 0.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{\alpha}{x}}=x$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
ε) Να δείξετε ότι $5^{10}<3^3\cdot 7^7$.
στ) Αν $f(x)+\beta\ge\beta x$ για κάθε $x>0$ να βρείτε την τιμή του $\beta\in\mathbb{R}$.
ζ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+c$, $x\in(0,+\infty)$ και $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$.
η) Να βρείτε τις παράγουσες της f.
θ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα των x.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα και στο 0 επομένως

$$\kappa=f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x\right)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$.

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Επίσης η f έχει ελάχιστο στο $x=\frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln x\right)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=\left[0,\frac{1}{e}\right]$ άρα $f\left(\Delta_1\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),f\left(0\right)\right]=\left[-\frac{1}{e},0\right]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$\Delta_2=\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ άρα $f\left(\Delta_2\right)=\left(\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} f\left(\frac{1}{e}\right),\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)\right)=\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f\left(A\right)=f\left(\Delta_1\right)\cup f\left(\Delta_2\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

δ) Η εξίσωση έχει σύνολο ορισμού $\left(0,+\infty\right)$.

$e^{\frac{\alpha}{x}}=x\Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x}\Leftrightarrow x\ln x=\alpha\Leftrightarrow f\left(x\right)=\alpha$

-Αν $\alpha<-\frac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη

-Αν $\alpha=-\frac{1}{e}$ τότε $\alpha\in f\left(\Delta_1\right)=\left[-\frac{1}{e},0\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $\frac{1}{e}$.

-Αν $-\frac{1}{e}<\alpha\le 0$ τότε $\alpha\in f\left(\Delta_1\right)$ και $\alpha\in f\left(\Delta_2\right)$, η f γνησίως μονότονη στα Δ_1 ,Δ_2 άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες .

-Αν $\alpha>0$ τότε $\alpha\in f\left(\Delta_2\right)$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ_2 άρα η εξίσωση έχει μια ρίζα .

ε) $f''(x)=\left(\ln x+1\right)'=\frac{1}{x}>0$ για κάθε x > 0, άρα f ′ γνησίως αύξουσα.

Η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα [3,5] και [5,7], άρα υπάρχουν $\xi_1\in\left(3,5\right)$ τέτοιο ώστε $f'\left(\xi_1\right)=\frac{f\left(5\right)-f\left(3\right)}{2}$ και $\xi_2\in\left(5,7\right)$ τέτοιο ώστε $f'\left(\xi_2\right)=\frac{f\left(7\right)-f\left(5\right)}{2}$.

Οπότε έχουμε $\xi_1<\xi_2\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'\left(\xi_1\right)<f'\left(\xi_2\right)\Leftrightarrow\frac{f\left(5\right)-f\left(3\right)}{2}<\frac{f\left(7\right)-f\left(5\right)}{2}\Leftrightarrow 2f\left(5\right)<f\left(3\right)+f\left(7\right)\Leftrightarrow$

$$2\cdot 5\ln 5<3\ln 3+7\ln 7\Leftrightarrow \ln 5^{10}<\ln 3^3+\ln 7^7\Leftrightarrow \ln 5^{10}<\ln\left(3^3\cdot 7^7\right)\Leftrightarrow 5^{10}<3^3\cdot 7^7$$

στ) Για κάθε $x>0: f(x)+\beta\ge\beta x\Leftrightarrow f(x)+\beta-\beta x\ge 0$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)+\beta-\beta x$, $x\in\left(0,+\infty\right)$, οπότε $g(x)\ge 0\Leftrightarrow g(x)\ge g(1)$.

- $1\in\left(0,+\infty\right)$, άρα 1 εσωτερικό σημείο του διαστήματος $\left(0,+\infty\right)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο 1
- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο 1, με

$g'(x)=\left(f(x)+\beta-\beta x\right)'=f'(x)-\beta=\ln x+1-\beta$, $x\in\left(0,+\infty\right)$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε $g'(1)=0\Leftrightarrow \ln 1+1-\beta=0\Leftrightarrow\beta=1$

ζ) Για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right): F'(x)=\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+c\right)'=x\ln x+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=x\ln x=f\left(x\right)$.Άρα η F είναι παράγουσα της f.

η) Η f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$, άρα έχει παράγουσα. Η παράγουσα θα είναι της μορφής

$G\left(x\right)=\begin{cases}F(x) & ,x>0\\ k & ,x=0\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$. Η G είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ ως παραγωγίσιμη οπότε

$k=\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^2\ln x}{2}-\dfrac{x^2}{4}+c\right)=c$,αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\left(x\ln x\right)\right)=0\cdot 0=0$.

Άρα $G\left(x\right)=\begin{cases}F(x) & ,x>0\\ c & ,x=0\end{cases}$.

θ) $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

Για $x\in\left[0,1\right]: f\left(x\right)\le 0$

Άρα: $E=\int_0^1 -f\left(x\right)dx=-\int_0^1 f\left(x\right)dx=-\left[G\left(x\right)\right]_0^1=-\left[G\left(1\right)-G\left(0\right)\right]=G\left(0\right)-G\left(1\right)=$

$c-F\left(1\right)=c-\left(-\dfrac{1}{4}+c\right)=\dfrac{1}{4}$τμ

6. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού $F:\left(-6,2\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- F αρχική της πολυωνυμικής συνάρτησης $f:\left(-6,2\right)\to\mathbb{R}$.
- $F(x-1)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\alpha$,
- $F(x)\le F(-4)$ για κάθε $x\in\left(-6,2\right)$,
- Για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο .

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, $x_0\in\left(-6,2\right)$ της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) Να δείξετε ότι $\alpha=3,\beta=-9$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3x^2+12x$, $x\in\left(-6,2\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(-x-3)-F(x-1)-32}{x^2-2x+1}$ είναι καλώς ορισμένο και να το υπολογίσετε .

ε) Έστω τα σημεία $A\left(\alpha,0\right),\alpha\in\left(-4,-2\right)$, $\Delta\left(\alpha,f(\alpha)\right)$, Β και Γ τα συμμετρικά των Α και Δ αντίστοιχα ω ς προς την ευθεία $x=-2$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\in\left(-4,-2\right)$ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι μέγιστο.

στ) Να δείξετε ότι $-2(1-e^{-4})\le\int\limits_{e^{-4}}^{1}F(\ln x)\le 30\left((1-e^{-4}\right)$.

Λύση

α) Η συνάρτηση F παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ και επειδή $F(x)\le F(-4)$ για κάθε $x\in\left(-6,2\right)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=-4$. Τα σημεία με τετμημένη $x=0$ και $x=-4$ είναι εσωτερικά σημεία του $\left(-6,2\right)$ και η F είναι παραγωγίσιμη σε αυτά εφόσον είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-6,2\right)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε θα έχουμε ότι

$F'\left(-4\right)=0$ και $F'\left(0\right)=0$, δηλαδή $f\left(-4\right)=0$ και $f\left(0\right)=0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-4,0\right]\subseteq\left(-6,2\right)$ ως πολυωνυμική , παραγωγίσιμη στο $\left(-4,0\right)\subseteq\left(-6,2\right)$ και $f\left(-4\right)=0$ και $f\left(0\right)=0$, άρα από θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(-4,0\right)\subseteq\left(-6,2\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=0$, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, με $x_0\in\left(-6,2\right)$, της γραφικής παράστασης της f ώστε η εφαπτομένη της στο Μ να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

β) Από το α) γνωρίζουμε ότι $F'(-4)=0$ και $F'(0)=0$. Η F είναι παραγωγίσιμη άρα :

$F(x-1)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\alpha \Rightarrow [F(x-1)]'=\left(x^3+\alpha x^2+\beta x+\alpha\right)' \Rightarrow (x-1)'F'(x-1)=3x^2+2\alpha x+\beta \Rightarrow$
$F'(x-1)=3x^2+2\alpha x+\beta$ (1).

Από τη σχέση (1) για $x=1$, $x=-3$ έχουμε αντίστοιχα $F'(0)=3+2\alpha+\beta \overset{F'(0)=0}{\Rightarrow} 2\alpha+\beta=-3$ (2),
$27-6\alpha+\beta=0 \Rightarrow 6\alpha-\beta=27$ (3). Από τις (2),(3) έχουμε :

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=-3\\6\alpha-\beta=27\end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow} \begin{cases}8\alpha=24\\2\alpha+\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=3\\2\cdot 3+\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=3\\\beta=-9\end{cases}.$$

γ) Για $\alpha=3,\beta=-9$ έχουμε ότι $F(x-1)=x^3+3x^2-9x+3$,
$F'(x-1)=3x^2+6x-9 \Leftrightarrow f(x-1)=3x^2+6x-9$ (4).
Θέτοντας $x-1=u \Leftrightarrow x=u+1$ στην (4) έχουμε :
$f(x-1)=3x^2+6x-9 \Leftrightarrow f(u)=3(u+1)^2+6(u+1)-9 \Leftrightarrow f(u)=3u^2+12u$ άρα $f(x)=3x^2+12x$,
$x\in(-6,2)$

δ) Η συνάρτηση $g(x)=x^2-2x+1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, με $1\in\mathbb{R}$ και για το πεδίο ορισμού της $F(-x-3)-F(x-1)$ πρέπει και αρκεί

$$\begin{cases}-6<-x-3<2\\-6<x-1<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3<-x<5\\-5<x<3\end{cases} \Leftrightarrow -5<x<3$$ και εφόσον $1\in(-5,3)$ το όριο είναι καλώς ορισμένο .

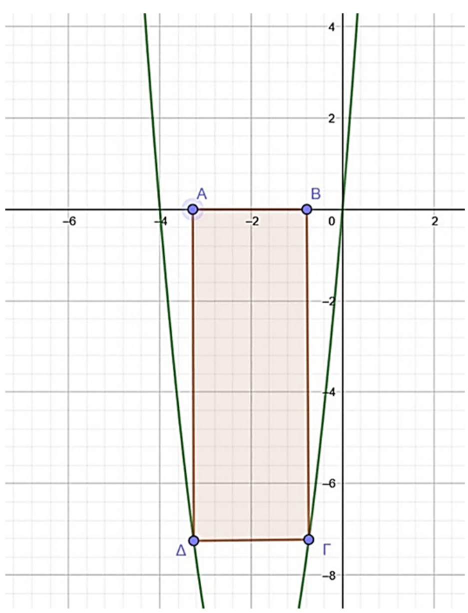
Είναι $F(x-1)=x^3+3x^2-9x+3$. Για $x=-3$ είναι $F(-4)=-27+27+27+3=30$ και για $x=1$ είναι $F(0)=1+3-9+3=-2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{F(-x-3)-F(x-1)-32}{x^2-2x+1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\left(F(-x-3)-F(x-1)-5\right)'}{\left(x^2-2x+1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{(-x-3)'F'(-x-3)-(x-1)'F'(x-1)}{2x-2}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1f(-x-3)-f(x-1)}{2x-2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} =\lim_{x\to 1}\frac{-1f'(-x-3)(-x-3)'-f'(x-1)(x-1)'}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(-x-3)-f'(x-1)}{2}=$$

$$\frac{f'(-4)-f'(0)}{2}=\frac{-36+12}{2}=-12.$$

ε) Εφόσον $\alpha\in(-4,-2)$ το ορθογώνιο ΑΒΓΔ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα . Η βάση ΑΒ έχει μήκος $2(-2-\alpha)$
Άρα $(ΑΒΓΔ)=\beta\cdot\upsilon=ΑΒ\cdot ΑΔ=(-4-2\alpha)|f(\alpha)|=$
$(-4-2\alpha)\cdot\left|3\alpha^2+12\alpha\right| \overset{3\alpha^2+12\alpha<0}{=} (-4-2\alpha)\left(-3\alpha^2-12\alpha\right)=$
$(4+2\alpha)\left(12\alpha+3\alpha^2\right)=6\alpha^3+36\alpha^2+48\alpha$.
Έστω $E(\alpha)=6\alpha^3+36\alpha^2+48\alpha$, $\alpha\in(-4,-2)$. Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(-4,-2)$ με



$E'(\alpha)=18\alpha^2+72\alpha+48=6\left(3\alpha^2+12\alpha+8\right)$.
$E'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 3\alpha^2+12\alpha+8=0 \Leftrightarrow$
$$\alpha_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{48}}{6}=\frac{-12\pm 4\sqrt{3}}{6}$$

Άρα $\alpha_1 = -2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \notin (-4,-2)$ απορρίπτεται ή $\alpha_2 = -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ δεκτή *.

Είναι $E'(\alpha) < 0 \Leftrightarrow 6\left(\alpha + 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(\underbrace{\alpha + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}}_{<0}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\alpha + 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} > 0 \Leftrightarrow \alpha > -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ άρα

$E \searrow \left[-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, -2\right]$ και $E \nearrow \left[-4, -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο α_2.

*($\alpha_2 \in (-4,-2)$: $-4 < -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < -2$ διότι : $-2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < -2$ και

$9 > 3 \Leftrightarrow 3 > \sqrt{3} \Leftrightarrow -6 < -2\sqrt{3} \Leftrightarrow -12 < -6 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow -4 < -2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$)

στ) Είναι $F'(x) = f(x) = 3x^2 + 12x$, $x \in (-6,2)$.

Έχουμε $F'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4,0)$, η F είναι συνεχής στο $[-4,0]$ οπότε η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4,0]$.Άρα :

$e^{-4} \le x \le 1 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^{-4} \le \ln x \le \ln 1 \Leftrightarrow -4 \le \ln x \le 0 \overset{\searrow}{\Leftrightarrow} F(-4) \ge F(\ln x) \ge F(0) \Leftrightarrow -2 \le F(\ln x) \le 30$ Άρα

$\int_{e^{-4}}^{1} -2dx \le \int_{e^{-4}}^{1} F(\ln x)dx \le \int_{e^{-4}}^{1} 30dx \Leftrightarrow -2(1-e^{-4}) \le \int_{e^{-4}}^{1} F(\ln x)dx \le 30(1-e^{-4})$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει ότι:

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $-\frac{1}{2023}$ για $x=1$ και για $x=4$,
- $f(-1) = \frac{1}{2023}$,
- Η $G(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-2023 \cdot f(x)}$ είναι παράγουσα της g και
- $\int_{-1}^{1} x^2 g(x^3)dx = -\frac{1}{2023} \cdot \frac{e^2 - 1}{3e}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2023$ και στη συνέχεια ότι $g(x) = e^{-2023 \cdot f(x)} \cdot f\,'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει τρία τουλάχιστον κοινά σημεία με τον άξονα x΄x .

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = f\,''(x) - 2023 \cdot \left(f\,'(x)\right)^2$ δεν είναι 1-1.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{1}^{4} G(x)dx \ge -\frac{3e}{2023}$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_{1}^{4} x \cdot g(x)dx \le 0$.

Λύση

α) Θέτουμε $x^3 = u$, άρα $du = 3x^2dx$,

x	-1	1
u	-1	1

$$\int_{-1}^{1} x^2 g(x^3)dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} g(u)\,du = \frac{1}{3}\big[G(u)\big]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\alpha}\cdot e^{-2023\cdot f(x)}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3\alpha}\left(e^{-2023f(1)} - e^{-2023f(-1)}\right) = \frac{1}{3\alpha}\left(e^{-2023\cdot\left(-\frac{1}{2023}\right)} - e^{-2023\cdot\frac{1}{2023}}\right) = \frac{1}{3\alpha}\left(e - e^{-1}\right) = \frac{1}{3\alpha}\cdot\frac{e^2-1}{e}$$

Άρα $\frac{1}{\cancel{3}\alpha}\cdot\frac{\cancel{e^2-1}}{\cancel{e}} = -\frac{1}{2023}\cdot\frac{\cancel{e^2-1}}{\cancel{3}\cancel{e}} \Leftrightarrow \alpha = -2023$. Η G είναι παράγουσα της g άρα

$$g(x) = G'(x) = \left(-\frac{1}{2023}\cdot e^{-2023f(x)}\right)' = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2023}}\cdot e^{-2023f(x)}\cdot\left(\cancel{-}\cancel{2023}f(x)\right)' =$$

$$= e^{-2023f(x)}\cdot f\,'(x)$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2023f(x)}f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow f\,'(x) = 0$ έχει 3 τουλάχιστον ρίζες Στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της x=1 και για x= 4 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο , η f είναι παραγωγίσιμη στο R , άρα και στο x=1 , x=4 , οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f\,'(1) = f\,'(4) = 0$.Επίσης στο [1,4] ισχύει το Θ Rolle για την f ,αφού η f είναι συνεχής στο [1 , 4] , παραγωγίσιμη στο (1 ,4) και $f(1) = f(4) = -\frac{1}{2023}$ Άρα υπάρχει $\xi \in (1,4)$, ώστε $f\,'(\xi) = 0$. Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f\,'(x) = 0$ έχει 3 τουλάχιστον ρίζες οι οποίες είναι οι 1 , 4 και $\xi \in (1,4)$.

γ) Ισχύει $g'(x) = \left(e^{-2023f(x)}\cdot f\,'(x)\right)' = \left(e^{-2023f(x)}\right)'\cdot f'(x) + e^{-2023f(x)}\cdot f\,''(x) =$

$= -2023f\,'(x)\cdot e^{-2023f(x)}\cdot f\,'(x) + e^{-2023f(x)}\cdot f\,''(x) = e^{-2023f(x)}\left(f\,''(x) - 2023(f\,'(x)^2\right) = e^{-2023f(x)}\cdot\varphi(x)$.

Η g παραγωγίσιμη στο (1 ,4) , g συνεχής στο [1 ,4] .Επίσης $g(1) = g(\xi) = g(4) = 0,\quad \xi \in (1,4)$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ Rolle για την g στα [1 , ξ] και [ξ , 4] , οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,4)$, έτσι ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και $g'(\xi_2) = 0$.

$g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow e^{-2023f(\xi_1)}\cdot\varphi(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi_1) = 0$.

$g'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow e^{-2023f(\xi_2)}\cdot\varphi(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\xi_2) = 0$.

Άρα $\xi_1 \neq \xi_2$ και $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2) = 0$, άρα η φ δεν είναι 1-1.

δ) Έχουμε $G(x) = -\frac{1}{2023}\cdot e^{-2023\cdot f(x)}$. Ισχύει ότι $f(x) \geq -\frac{1}{2023}$, για κάθε $x \in R$, άρα και για κάθε $x \in [1,4]$. Άρα $f(x) \geq -\frac{1}{2023} \Leftrightarrow -2023f(x) \leq 1 \Leftrightarrow e^{-2023f(x)} \leq e \Leftrightarrow -\frac{1}{2023}e^{-2023f(x)} \geq -\frac{e}{2023} \Leftrightarrow$

$$G(x) \geq -\frac{e}{2023} \Leftrightarrow \int_1^4 G(x)dx \geq \int_1^4 -\frac{e}{2023}dx = -\frac{e}{2023}\int_1^4 dx = -\frac{e}{2023}\big[x\big]_1^4 = -\frac{3e}{2023}$$

ε) Έχουμε $\int_1^4 x\cdot g(x)dx = \int_1^4 x\cdot G'(x)dx = \big[xG(x)\big]_1^4 - \int_1^4 G(x)dx = 4G(4) - 1G(1) - \int_1^4 G(x)dx =$

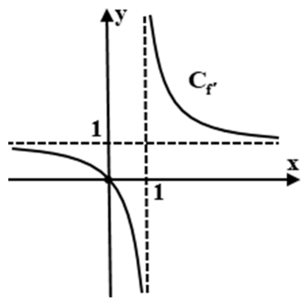
$$-\frac{4}{2023}e^{-2023f(4)} + \frac{1}{2023}e^{-2023f(1)} - \int_1^4 G(x)dx = -\frac{4}{2023}e^{\cancel{-2023}\cdot\left(\cancel{-\frac{1}{2023}}\right)} + \frac{1}{2023}e^{\cancel{-2023}\cdot\left(\cancel{-\frac{1}{2023}}\right)} - \int_1^4 G(x)dx =$$

$$= -\frac{4e}{2023} + \frac{e}{2023} - \int_1^4 G(x)dx = -\frac{3e}{2023} - \int_1^4 G(x)dx\ .(1)$$

Από δ ερώτημα έχουμε $\int_1^4 G(x)dx \ge -\frac{3e}{2023} \Leftrightarrow -\int_1^4 G(x)dx \le \frac{3e}{2023} \Leftrightarrow$

$-\frac{3e}{2023} - \int_1^4 G(x)dx \le -\frac{3e}{2023} + \frac{3e}{2023} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \int_1^4 x \cdot g(x)dx \le 0$.

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι:



- $f(0)=-1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- Η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες για κάθε $\lambda<-1$
- Η C_f έχει στο $-\infty$ και στο $+\infty$ ασύμπτωτη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)<f'(-1)x+f'(-1)+f(1)$ για κάθε $x<-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

γ) Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i) $\int_{-1}^{0} f(x)dx < \frac{f'(-1)+2f(1)}{2}$ **ii)** $\int_{\alpha}^{0} f(x)dx < \alpha$ για κάθε $\alpha<0$

δ) Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x.

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να την χαράξετε.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$ ως παραγωγίσιμη με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ άρα $f\nearrow(-\infty,0]$ ως συνεχής στο 0 και $f\nearrow(1,+\infty)$. Επίσης είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα $f\searrow[0,1)$ ως συνεχής στο 0.

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=-1$.

Είναι επίσης $f'\searrow(-\infty,1)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και $f'\searrow(1,+\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$. Η f προφανώς δεν έχει σημεία καμπής.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(-1,f(-1))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y=f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ τότε η C_f στο διάστημα αυτό βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτόμενή της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x)\le f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=-1$ άρα για κάθε $x<-1$ είναι $f(x)<f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f'(-1)x\right]=-\infty$ επειδή $f'(-1)>0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

γ) i) Είναι $f(x)\le f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$ για κάθε $x\in[-1,0]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=-1$ άρα είναι $\int_{-1}^{0} f(x)dx<\int_{-1}^{0}\left[f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)\right]dx=$

$$=\left[\frac{f'(-1)x^2}{2}+\left[f'(-1)+f(-1)\right]x\right]_{-1}^{0}=-\left[\frac{f'(-1)}{2}-f'(-1)-f(-1)\right]=$$

$$=-\frac{f'(-1)}{2}+f'(-1)+f(-1)=\frac{f'(-1)}{2}+f(-1)=\frac{f'(-1)+2f(-1)}{2}$$

ii) 1ος τρόπος: $\alpha \le x \le 0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(0) = -1$ με το ίσον να ισχύει μόνον για x=0 άρα

$\int_{\alpha}^{0} f(x)dx < -\int_{\alpha}^{0} dx = \alpha$

2ος τρόπος: Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (0,0) έχει εξίσωση

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = f(0) = -1$ αφού $f'(0) = 0$ από το σχήμα

Η f είναι κοίλη στο $[\alpha,0]$ με $\alpha < 0$ άρα $f(x) \le f(0) = -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για x=0 άρα

$\int_{\alpha}^{0} f(x)dx < -\int_{\alpha}^{0} dx = \alpha$

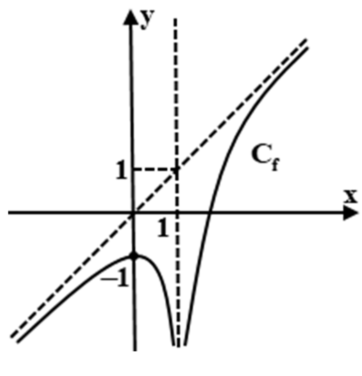
δ) Πρέπει να βρούμε να πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες για κάθε $\lambda < -1$ άρα αφού η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0,1)$ και $(1,+\infty)$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα για κάθε $\lambda < -1$.

Είναι $f\nearrow(-\infty,0]$ και συνεχής άρα $f((-\infty,0]) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty,-1]$ και στο διάστημα αυτό η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα.

Είναι $f\searrow(0,1)$ και συνεχής άρα $f((0,1)) = \left(\lim\limits_{x\to1^-} f(x), f(0)\right) = \left(\lim\limits_{x\to1^-} f(x), -1\right)$ οπότε για να έχει στο διάστημα αυτό ρίζα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ για κάθε $\lambda < -1$ πρέπει $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, άρα $f((0,1)) = (-\infty,-1)$ και στο διάστημα αυτό η εξίσωση δεν έχει ρίζα.

Είναι $f\nearrow(1,+\infty)$ και συνεχής άρα $f((1,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to1^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to1^+} f(x), +\infty\right)$ οπότε για να έχει στο διάστημα αυτό ρίζα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ για κάθε $\lambda < -1$ πρέπει $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$, άρα $f((1,+\infty)) = \mathbb{R}$.



Επομένως στο διάστημα αυτό η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα άρα η C_f τέμνει τον x΄x σε 1 σημείο.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ και επειδή η C_f δέχεται πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε αυτή είναι η $y = x$.

9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $\left[0,1\right]$ για την οποία ισχύει :
$f^3\left(x\right)+f^2\left(x\right)+f\left(x\right)=3x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,1\right]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Με δεδομένο ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[0,1\right]$, να αποδείξετε ότι

β) η ευθεία $y=\frac{1}{2}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in\left(0,1\right)$.

γ) υπάρχει ένα ακριβώς $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f\left(x_1\right)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)}{3}$.

δ) υπάρχει ένα ακριβώς $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+2023$.

ε) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(0,1\right)$ τέτοια ώστε $f'\left(\xi_1\right)+f'\left(\xi_2\right)=2$.

στ) $\int_0^1 f\left(x\right)dx\le 2$ αφού αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{f^2\left(x\right)+f\left(x\right)+1}\le\dfrac{4}{3}$.

ζ) **i.** $xf'\left(x\right)\le f\left(x\right)\le 3x$ για κάθε $x\in\left[0,1\right]$.

ii. $\frac{1}{2}<E<\frac{3}{2}$, όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=0, x=1$ και τον άξονα x΄x.

η) i. $h\left(0\right)=0$, όπου h συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\left[0,1\right]$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h\left(x\right)-f\left(x\right)}{x}=2023$$

ii. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{h\left(x\right)+\eta\mu 3x+e^x+x-1}{x}=2027+e$.

Λύση

α) Είναι $f^3\left(x\right)+f^2\left(x\right)+f\left(x\right)=3x$ (1).

Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε ;

$3f^2\left(x\right)f'\left(x\right)+2f\left(x\right)f'\left(x\right)+f'\left(x\right)=3\Leftrightarrow f'\left(x\right)\left(3f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)+1\right)=3.$ (2)

Αν θέσουμε στην παράσταση $3f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)+1$ όπου $f\left(x\right)=\omega$ προκύπτει το τριώνυμο $3\omega^2+2\omega+1$, το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$ οπότε $3\omega^2+2\omega+1>0$ άρα ισοδύναμα
$3f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)+1>0$.

Από τη σχέση (1) για x = 0 έχουμε: $f^3\left(0\right)+f^2\left(0\right)+f\left(0\right)=0\Leftrightarrow f\left(0\right)\left(\underbrace{f^2\left(0\right)+f\left(0\right)+1}_{\neq 0}\right)=0\Leftrightarrow f\left(0\right)=0$.

Αν θέσουμε στην παράσταση $f^2\left(0\right)+f\left(0\right)+1$ όπου $f\left(0\right)=u$ προκύπτει το τριώνυμο u^2+u+1, το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta=-3<0$ οπότε $u^2+u+1\neq 0$ άρα ισοδύναμα
$f^2\left(0\right)+f\left(0\right)+1\neq 0$.

- Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε: $f^3\left(1\right)+f^2\left(1\right)+f\left(1\right)=3\Leftrightarrow f^3\left(1\right)-1+f^2\left(1\right)-1+f\left(1\right)-1=0\Leftrightarrow$

$\left(f\left(1\right)-1\right)\left(f^2\left(1\right)+f\left(1\right)+1\right)+\left(f\left(1\right)-1\right)\left(f\left(1\right)+1\right)+\left(f\left(1\right)-1\right)=0\Leftrightarrow$

$\left(f\left(1\right)-1\right)\left(\underbrace{f^2\left(1\right)+2f\left(1\right)+3}_{\neq 0}\right)=0\Leftrightarrow f\left(1\right)-1=0\Leftrightarrow f\left(1\right)=1$.

Αν θέσουμε στην παράσταση $f^2(1)+2f(1)+3$ όπου $f(1)=k$ προκύπτει το τριώνυμο k^2+2k+3 , το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$ οπότε $k^2+2k+3\neq 0$ άρα ισοδύναμα
$f^2(1)+2f(1)+3\neq 0$.

Από τη σχέση (2) έχουμε $f'(x)=\dfrac{3}{3f^2(x)+2f(x)+1}>0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Άρα έχει σύνολο τιμών : $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[0,1]$.

β) Το $\frac{1}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{1}{2}$.

Το x_0 μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Άρα η ευθεία $y=\frac{1}{2}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=3f(x)-f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right), x\in[0,1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(0)=3f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right)\Leftrightarrow$ $g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0)-f\left(\frac{1}{4}\right)+f(0)-f\left(\frac{1}{5}\right)<0$.

(Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ οπότε $f(0)<f\left(\frac{1}{3}\right), f(0)<f\left(\frac{1}{4}\right)$ και $f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)$)

Επίσης $g(1)=3f(1)-f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right)\Leftrightarrow$ $g(1)=f(1)-f\left(\frac{1}{3}\right)+f(1)-f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)-f\left(\frac{1}{5}\right)>0$ άρα $g(0)\cdot g(1)<0$.

(Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ οπότε $f(1)>f\left(\frac{1}{3}\right), f(1)>f\left(\frac{1}{4}\right)$ και $f(1)>f\left(\frac{1}{5}\right)$)

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε

$$g(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)}{3}.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $g'(x)=3f'(x)>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο οπότε το x_1 είναι μοναδικό.

δ) Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $x_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\Leftrightarrow f'(x_2)=1.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο

$$f''(x)=-\frac{3\left(6f(x)f'(x)+2f'(x)\right)}{\left(3f^2(x)+2f(x)+1\right)^2}\Leftrightarrow f''(x)=-\frac{3f'(x)\left(6f(x)+2\right)}{\left(3f^2(x)+2f(x)+1\right)^2}.$$

Όμως $f(x)\geq 0$ στο $[0,1]$ οπότε $6f(x)+2>0$.

Επίσης $f'(x)>0, \left(3f^2(x)+2f(x)+1\right)^2>0$ οπότε $f''(x)<0$ άρα f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα x_2 μοναδικό. Επομένως υπάρχει ένα ακριβώς $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+2023$.

ε) Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right]$ οπότε υπάρχουν

$\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{1-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$,

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\dfrac{1-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=2-2f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Επομένως $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\cancel{2f\left(\frac{1}{2}\right)}+2-\cancel{2f\left(\frac{1}{2}\right)}\Leftrightarrow f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.

στ) Είναι $f^2(x)+f(x)+1=f^2(x)+f(x)+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$ οπότε $\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)+1}\leq\dfrac{4}{3}$.

Για $x\geq 0$ έχουμε $\dfrac{3x}{f^2(x)+f(x)+1}\leq\dfrac{4}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x\Leftrightarrow f(x)\leq 4x$.

Η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[0,1]$ οπότε $\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1 4xdx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx\leq\left[2x^2\right]_0^1\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx\leq 2$.

ζ)i. Για $x=0$ ισχύει η ισότητα. Για $x>0$ είναι $xf'(x)<f(x)<3x\Leftrightarrow f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}<3$.

Για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x],x>0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x}$.

Όμως $0<\xi<x\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(\xi)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}<3$ αφού $f'(0)=\dfrac{3}{3f^2(0)+2f(0)+1}=\dfrac{3}{1}=3$.

ii) Είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ οπότε $E=\int_0^1 f(x)dx$.

Η ισότητα στην ανισότητα του ερωτήματος ζ)i) δεν ισχύει για όλες τιμές του x οπότε έχουμε :

$\int_0^1 xf'(x)dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 3xdx\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx<E<\left[\dfrac{3x^2}{2}\right]_0^1\Leftrightarrow 1-E<E<\dfrac{3}{2}$.

Επομένως $1-E<E\Leftrightarrow 1<2E\Leftrightarrow\frac{1}{2}<E$ άρα $\frac{1}{2}<E<\frac{3}{2}$.

η) i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $m(x)=\dfrac{h(x)-f(x)}{x},x\in(0,1]\Leftrightarrow h(x)-f(x)=m(x)\cdot x\Leftrightarrow$

$h(x)=m(x)\cdot x+f(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m(x)\cdot x+f(x)\right)=0=h(0)$ αφού η h είναι συνεχής στο 0.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{h(x)+\eta\mu 3x+e^x+x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{m(x)\cdot x+f(x)+\eta\mu 3x+e^x+x-1}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m(x)+\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{\eta\mu 3x}{x}+\dfrac{e^x+x-1}{x-1}\right)=2023+f'(0)+3+2=2031$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}\underset{\substack{x\to 0^+,\, u\to 0^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=3x}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\eta\mu u}{\frac{u}{3}}=\lim\limits_{u\to 0^+}3\cdot\dfrac{\eta\mu u}{u}=3$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+x-1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+1\right)=2$.

10. Έστω οι συναρτήσεις $\varphi(x)=\sqrt{x-1}$ και $\kappa(x)=-\ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της φ δεν βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της κ.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=\varphi\circ\kappa$.

γ) Αν $h(x)=\varphi(\kappa(x))=\sqrt{-\ln x-1}$, $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$ να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ, κ και την ευθεία y = 1.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=-\dfrac{\varphi^2(x)}{\kappa(x)}$, $x>1$ είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Έστω F αρχική της f στο $(1,+\infty)$ με $F(e)=e^2-e$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο της (e, F(e)).

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 F(x)dx>6e-6$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{1}{F(x)-(e-1)x}=+\infty$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F(x)=2023$ έχει ακριβώς μία λύση αν γνωρίζετε ότι το $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)$ υπάρχει .

Λύση

α) Για κάθε $x\geq 1$ είναι $\varphi(x)\geq 0$ και $\kappa(x)\leq 0$, οπότε $\varphi(x)\geq\kappa(x)$.

β) Για να ορίζεται η h πρέπει: $\begin{cases}x\in D_\kappa\\ \kappa(x)\in D_\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ -\ln x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln x\leq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\leq e^{-1}\end{cases}\Rightarrow 0<x\leq\frac{1}{e}$, οπότε

$h(x)=\varphi(\kappa(x))=\sqrt{-\ln x-1}$, $D_h=\left(0,\frac{1}{e}\right]$.

γ) Έστω $x_1,x_2\in D_h$ με $x_1<x_2$, τότε $\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow -\ln x_1>-\ln x_2\Leftrightarrow$
$-\ln x_1-1>-\ln x_2-1\Leftrightarrow\sqrt{-\ln x_1-1}>\sqrt{-\ln x_2-1}\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)\Leftrightarrow h\searrow D_h\Rightarrow h\ 1-1$.

$h(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{-\ln x-1}=y$.

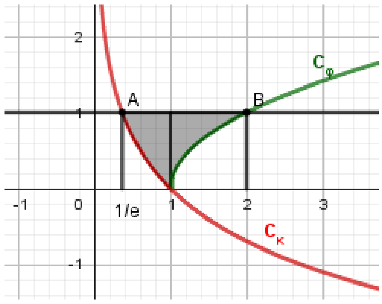
Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{-\ln x-1}\underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow\\ y\to+\infty}}{\overset{-\ln x-1=y}{=}}\lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$ και $h\left(\frac{1}{e}\right)=\sqrt{-\ln\frac{1}{e}-1}=\sqrt{1-1}=0$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το $h(A)=[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in D_h=\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και $y\geq 0$ είναι $-\ln x-1=y^2\Leftrightarrow -y^2-1=\ln x\Leftrightarrow x=e^{-y^2-1}$.

Άρα $h^{-1}(y)=e^{-y^2-1},\ y\geq 0$, οπότε $h^{-1}(x)=e^{-x^2-1},\ x\geq 0$.

δ) Αρχικά σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ, κ και την ευθεία y = 1.



Για τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β έχουμε:

$-\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$, άρα $A\left(\frac{1}{e},1\right)$ και

$\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, άρα $B(2,1)$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_{\frac{1}{e}}^{1}(1+\ln x)dx + \int_{1}^{2}\left(1-\sqrt{x-1}\right)dx \Leftrightarrow$

$$E = [x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{1} + 1 - \int_{1}^{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}dx = 1 + \frac{1}{e} - \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{2} \Leftrightarrow$$

$$E = 1 + \frac{1}{e} - \frac{2}{3} = \frac{e+3}{3e}.$$

ε) $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, $x > 1$.

Για x > 1 είναι $f'(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1 + \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$. Έστω $t(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$, $x \geq 1$.

Για x > 1 είναι $t'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0$ και επειδή η t είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$
.

Για κάθε x > 1 είναι $t(x) > t(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

στ) i. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $F'(x) = f(x)$, άρα $F'(e) = f(e) = e-1$

Η εφαπτομένη της C_F στο x = e είναι η ευθεία ε: $y - F(e) = F'(e)(x-e) \Leftrightarrow y - e^2 + e = (e-1)(x-e) \Leftrightarrow$

$y - e^2 + e = (e-1)x - e^2 + e \Leftrightarrow y = (e-1)x$.

ii. Είναι $F''(x) = f'(x) > 0$ οπότε η F είναι κυρτή και βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, οπότε για κάθε x > 1 είναι $F(x) \geq (e-1)x$ οπότε $\int_2^4 F(x)dx > \int_2^4 (e-1)xdx \Leftrightarrow$

$$\int_2^4 F(x)dx > \left[(e-1)\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = 6e-6.$$

iii. Θέτω $F(x) - (e-1)x = u$. Όταν $x \to e$ τότε $u \to 0$ και u>0 για κάθε $x \in (1,e) \cup (e,+\infty)$, οπότε

$$\lim_{x\to e}\frac{1}{F(x)-(e-1)x} = \lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u} = +\infty.$$

iv. Επειδή για κάθε x > 1 είναι $F(x) \geq (e-1)x$ και $\lim_{x\to+\infty}(e-1)x = +\infty$, είναι και $\lim_{x\to+\infty}F(x) = +\infty$.

Η F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$F((1,+\infty)) = \left(\lim_{x\to1^+}F(x), \lim_{x\to+\infty}F(x)\right) = \left(\lim_{x\to1^+}F(x), +\infty\right).$$

Επειδή η F είναι γνησίως αύξουσα και 1< e είναι $\lim_{x\to1^+}F(x) \leq F(e) = e^2 - 1$ ή $\lim_{x\to1^+}F(x) = -\infty$.

Σε κάθε περίπτωση το 2023 περιέχεται στο σύνολο τιμών της F, οπότε η εξίσωση $F(x) = 2023$ έχει ακριβώς μία λύση.