

Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας



2019 - 2020



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

1ο Διαγώνισμα

15-3-2020

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι:
η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε $f \circ g = g \circ f$ ».

- α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

A4. Να βρείτε το λάθος στην παρακάτω διαδικασία και να εξηγήσετε γιατί είναι λάθος:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-1}^1 = \ln 1 - \ln 1 = 0$$

μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
- β)** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- γ)** Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [a, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(\ln x) = \ln x |\ln x|$ για κάθε $x > 0$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

μονάδες 3

B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

μονάδες 5

B3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και στη συνέχεια να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

μονάδες 6

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

μονάδες 5

B5. Να λύσετε την ανίσωση $f^2(\eta\mu x) \geq f^2(x) + x^{2020}$.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(e, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{\ln(x-e)^{x-e} + x-3}{x-e}$, $x > e$ και $f(e+1) = 0$.

Να δείξετε ότι:

Γ1. $f(x) = (x-3)\ln(x-e)$, $x > e$.

μονάδες 6

Γ2. Υπάρχει $\xi \in (3, e+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

μονάδες 5

Γ3. Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x = \xi$.

μονάδες 8

Γ4. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = -f(x) \text{ και } f, \text{ είναι } E(\Omega) = 3e^2 - 14e + 16 - 2(e-3)^2 \ln(3-e)$$

μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία ισχύουν $f(x) \geq e^x - 3(x+1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{e^{2a}-1}{e^a} + (1-a)^3 - (1+a)^3 + 4a$ για κάθε $a > 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - 3(x+1)^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$

μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η f έχει δύο κρίσιμα σημεία.

μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι $e^x - (e^2 - 18)x > 3(x+1)^2 + 9 - e^2$ για κάθε $x > 2$.

μονάδες 5

Καλή τύχη!