18η Άσκηση

Ανισώσεις 1ου βαθμού

Δίνονται οι παραστάσεις $\alpha = x - 1$ και $\beta = x + 2$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\alpha^2}{16} - \frac{\beta}{4} > \frac{(\beta-1)^2}{16} - \frac{\alpha+2}{2}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η παράσταση $A = \alpha(\beta - 1) - \beta^2$ ανήκει στο διάστημα $(7,11)$.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{\alpha+3}{2} - 2x < 4 - \frac{3(\beta-3)}{4} \qquad \text{και} \qquad \frac{\beta}{3} - \frac{x}{4} \geq \frac{1}{2}$$

δ) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ για τις οποίες η ανίσωση $\kappa(\alpha - 1) \leq 2(x - \lambda)$ επαληθεύεται για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $|\alpha| > |\beta|$ και να κάνετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ανίσωσης.

στ) Να λύσετε την ανίσωση $\left||\alpha| - 3\right| \leq 1$.

ζ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $8 \leq \sqrt{4x^2 + 16x + 16} + 2|\beta| \leq 16$

η) Να λύσετε την ανίσωση $|\beta x| + |x^2 - 4| > 0$.

θ) Για τις διαφορετικές τιμές του πραγματικού αριθμού μ, να λύσετε την ανίσωση $\mu\alpha > \beta$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) $\frac{α^2}{16}-\frac{β}{4}>\frac{(β-1)^2}{16}-\frac{α+2}{2} \Leftrightarrow \cancel{16}\cdot\frac{α^2}{\cancel{16}}-\cancel{16}^4\cdot\frac{β}{\cancel{4}}>\cancel{16}\cdot\frac{(β-1)^2}{\cancel{16}}-\cancel{16}^8\cdot\frac{α+2}{\cancel{2}} \Leftrightarrow$

$α^2-4β>(β-1)^2-8(α+2) \Leftrightarrow (x-1)^2-4(x+2)>(x+2-1)^2-8(x-1+2) \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1-4x-8>(x+1)^2-8(x+1) \Leftrightarrow \cancel{x^2}-6x-7>\cancel{x^2}+2x+1-8x-8 \Leftrightarrow$

$8x-2x-6x>7+1-8 \Leftrightarrow 0>0$ αδύνατη

β) Είναι $A=α(β-1)-β^2=(x-1)(x+2-1)-(x+2)^2=(x-1)(x+1)-(x^2+4x+4) \Leftrightarrow$

$A=\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-4x-4=-4x-5$

$A\in(7,11) \Leftrightarrow 7<A<11 \Leftrightarrow 7<-4x-5<11 \Leftrightarrow 7+5<-4x<11+5 \Leftrightarrow 12<-4x<16 \Leftrightarrow$

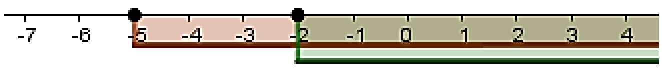
$\frac{12}{-4}>\frac{-4x}{-4}>\frac{16}{-4} \Leftrightarrow -3>x>-4$ ή $-4<x<-3$

γ) $\frac{α+3}{2}-2x<4-\frac{3(β-3)}{4} \Leftrightarrow \cancel{4}^2\cdot\frac{x-1+3}{\cancel{2}}-4\cdot 2x<4\cdot 4-\cancel{4}\cdot\frac{3(x+2-3)}{\cancel{4}} \Leftrightarrow$

$2(x+2)-8x<16-3(x-1) \Leftrightarrow 2x+4-8x<16-3x+3 \Leftrightarrow 2x-8x+3x<16+3-4 \Leftrightarrow$

$-3x<15 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3}>\frac{15}{-3} \Leftrightarrow x>-5$ **(1)**

$\frac{β}{3}-\frac{x}{4}\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cancel{12}^4\cdot\frac{x+2}{\cancel{3}}-\cancel{12}^3\cdot\frac{x}{\cancel{4}}\geq\cancel{12}^6\cdot\frac{1}{\cancel{2}} \Leftrightarrow 4(x+2)-3x\geq 6 \Leftrightarrow 4x+8-3x\geq 6 \Leftrightarrow x\geq -2$ **(2)**



Με συναλήθευση των (1), (2) προκύπτει $x\geq -2$

δ) $κ(α-1)\leq 2(x-λ) \Leftrightarrow κ(x-1-1)\leq 2x-2λ \Leftrightarrow κx-2κ\leq 2x-2λ \Leftrightarrow κx-2x\leq 2κ-2λ \Leftrightarrow$

$(κ-2)x\leq 2(κ-λ)$ (3)

Η (3) επαληθεύεται για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} κ-2=0 \\ \text{και} \\ 2(κ-λ)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} κ=2 \\ \text{και} \\ κ-λ\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} κ=2 \\ \text{και} \\ 2-λ\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} κ=2 \\ \text{και} \\ 2\geq λ \end{cases}$$

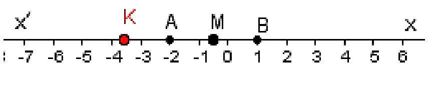
ε) $|α|>|β| \Leftrightarrow |x-1|>|x+2| \Leftrightarrow (x-1)^2>(x+2)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+1>\cancel{x^2}+4x+4 \Leftrightarrow 1-4>4x+2x \Leftrightarrow$

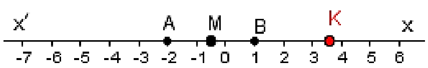
$6x<-3 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{6} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$

Έστω Α το σημείο που αντιστοιχεί στο -2 και Β το σημείο που αντιστοιχεί στο 1, στον άξονα των πραγματικών αριθμών και Κ το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό x. Είναι

$|α|>|β| \Leftrightarrow |x-1|>|x+2| \Leftrightarrow d(x,1)>d(x,-2) \Leftrightarrow (KB)>(KA)$

Έστω Μ το μέσο του ΑΒ, τότε στο σημείο Μ αντιστοιχεί ο αριθμός $\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$. Αν το Κ βρίσκεται στην ημιευθεία Μx΄ εκτός του Μ, τότε $(KA)<(KB)$, ενώ αν το Κ βρίσκεται στην ημιευθεία Μx εκτός του Μ, τότε



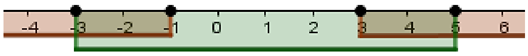


$(KB)<(KA)$, άρα το Μ βρίσκεται στην ημιευθεία Μx΄ , οπότε $x<-\frac{1}{2}$.

στ) $\left||\alpha|-3\right|\le 1 \Leftrightarrow -1\le|\alpha|-3\le 1 \Leftrightarrow 3-1\le|\alpha|\le 3+1 \Leftrightarrow 2\le|\alpha|\le 4 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}|\alpha|\ge 2\\ \text{και}\\ |\alpha|\le 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\le -2 \text{ ή } \alpha\ge 2\\ \text{και}\\ -4\le\alpha\le 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1\le -2 \Leftrightarrow x\le -1) \text{ ή } (x-1\ge 2 \Leftrightarrow x\ge 3)\\ \text{και}\\ -4\le x-1\le 4 \Leftrightarrow -3\le x\le 5\end{cases}$$

Με συναλήθευση προκύπτει ότι $x\in[-3,-1]\cup[3,5]$



ζ) $8\le\sqrt{4x^2+16x+16}+|\beta|\le 16 \Leftrightarrow 8\le\sqrt{4(x^2+4x+4)}+|x+2|\le 16 \Leftrightarrow$

$8\le 2\sqrt{(x+2)^2}+2|x+2|\le 16 \Leftrightarrow 8\le 2|x+2|+2|x+2|\le 16 \Leftrightarrow 8\le 4|x+2|\le 16 \Leftrightarrow 2\le|x+2|\le 4 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}|x+2|\ge 2\\ \text{και}\\ |x+2|\le 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2\le -2 \Leftrightarrow x\le -4) \text{ ή } (x+2\ge 2 \Leftrightarrow x\ge 0)\\ \text{και}\\ -4\le x+2\le 4 \Leftrightarrow -6\le x\le 2\end{cases}$$

Με συναλήθευση προκύπτει ότι $x\in[-6,-4]\cup[0,2]$

η) $|\beta x|+|x^2-4|>0 \Leftrightarrow |\beta||x|+|(x-2)(x+2)|>0 \Leftrightarrow |x+2||x|+|x-2||x+2|>0 \Leftrightarrow$

$|x+2|(|x|+|x-2|)>0$ (4)

Επειδή $|x|+|x-2|>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η (4) αληθεύει μόνο όταν $|x+2|>0 \Leftrightarrow x+2\ne 0 \Leftrightarrow x\ne -2$.

θ) $\mu\alpha>\beta \Leftrightarrow \mu(x-1)>x+2 \Leftrightarrow \mu x-\mu>x+2 \Leftrightarrow \mu x-x>\mu+2 \Leftrightarrow (\mu-1)x>\mu+2$ (5)

Αν $\mu-1>0 \Leftrightarrow \mu>1$ η (5) γίνεται: $x>\frac{\mu+2}{\mu-1}$.

Αν $\mu-1<0 \Leftrightarrow \mu<1$ η (5) γίνεται: $x<\frac{\mu+2}{\mu-1}$.

Τέλος αν $\mu=1$ η (5) γίνεται: $0x>3$ και είναι αδύνατη.