**Ψηφιακό Σχολείο**

**Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου**

**Κεφάλαιο 1ο**

**Θέμα Β**

1. Δίνεται η συνάρτηση . Nα βρεθεί:
**α)** Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f
**β)** Να αποδειχθεί ότι .
**γ)** Να δείξετε ότι το μέγιστο της συνάρτησης f είναι το .
2. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μεταβάλλεται έτσι ώστε το άθροισμα της βάσης του ΒΓ και του ύψους του ΑΔ να είναι 20cm.
**α)** Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει της βάσης του ΒΓ =x είναι .
**β)** Να βρείτε το μήκος της βάσης του ΒΓ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο.
Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.
3. Δίνεται η συνάρτηση .
**α)** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f.
**β)** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.
**γ)** Να βρείτε το α αν η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο ίσο με 5.
4. Δίνεται η συνάρτηση f  με τύπο , όπου .
**α)** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f  στο σημείο της  είναι παράλληλη στην ευθεία  , τότε να υπολογίσετε το α.
**β)** Αν 
5. Να υπολογίσετε το όριο .
6. Να μελετήσετε την f  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
7. Δίνεται η συνάρτηση f  με τύπο ,.
**α.** Να υπολογίσετε το όριο .
**β.** Να μελετήσετε την f  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f  στο σημείο της .
8. Με ένα σύρμα μήκους 100cm κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μήκους x και πλάτους y.
**α.** Να εκφράσετε τη διαγώνιο του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.
**β.** Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το μήκος της διαγωνίου να γίνει ελάχιστο.
9. Δίνεται η συνάρτηση . Αν το σημείο  ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τότε:
**α)** Να δείξετε ότι .
β) Να δείξετε ότι  .
**γ)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
10. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο .

**α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.
**β)** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.
**γ)** Να υπολογιστεί το .
**δ)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα x΄x .
11. Δίνεται η συνάρτηση  .
Θεωρούμε ότι η ευθεία ε: , είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f  στο σημείο της .
**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
**β)** Να βρείτε την παράγωγο της f.
**γ)** Αποδείξτε ότι  και .
**δ)** Για  και , να μελετηθεί η f  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
12. Έστω η συνάρτηση .

**α)** Να βρείτε το .
**β)** Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f  στο σημείο με τετμημένη .
**γ)** Βρείτε το  .
13. Δίνεται η συνάρτηση f  με τύπο , όπου g  παραγωγίσιμη στο . Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο Α(0,1) και η εφαπτομένη της στο Α είναι παράλληλη στην ευθεία (ε):  τότε:
**α)** Να βρεθεί το  .
**β)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f  στο σημείο .
14. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της   σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 30°.
**α)** Να βρείτε την τιμή .
**β)** Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε)
**γ)** Να υπολογίσετε το όριο  .

**Θέμα Γ**

1. Ένας ποδοσφαιριστής αφού τοποθετήσει τη μπάλα στο έδαφος την κλωτσά με δύναμη προς τα πάνω. Η τροχιά που διαγράφει η μπάλα υποθέτουμε ότι δίνεται από τη συνάρτηση   (όπου t ο χρόνος σε sec).
**α)** Να εκφράσετε την ταχύτητα της μπάλας συναρτήσει του χρόνου.
**β)** Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας για t = 1sec και t = 2sec. Πως ερμηνεύετε τα πρόσημα;
**γ)** Σε ποια χρονική στιγμή η μπάλα ξαναβρίσκεται στο έδαφος;
**δ)** Ποιο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο έφτασε η μπάλα;
2. Ο πληθυσμός μιας χώρας δίνεται για μια περίοδο 50 ετών από τη συνάρτηση  (σε εκατομμύρια), όπου   είναι ο χρόνος σε έτη και η χρονική στιγμή t = 0 αντιστοιχεί στην αρχή του έτους 1960.
**α)** Πόσος ήταν ο πληθυσμός στην αρχή της περιόδου και πόσος στο τέλος;
**β)** Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του πληθυσμού στην περίοδο αυτή των 50 ετών. Σε ποιο έτος προέκυψε αυτή;
**γ)** Ποιος ήταν ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού στα μέσα της χρονικής αυτής περιόδου δηλαδή όταν t = 25;
3. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α = 20 cm εγγράφουμε ορθογώνιο ΔΕΖΗ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν BE = x.
**α)** Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΔΕΖΗ συναρτήσει του x.
**β)** Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν x = 2.
**γ)** Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου αυτού γίνεται μέγιστο.
**δ)** Ποιές είναι τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου και πόσο είναι το εμβαδόν του.
4. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g  με τύπους  και .
5. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες.
6. Να βρείτε το όριο .
7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
8. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f  στο σημείο της .
9. Δίνεται η συνάρτηση ,  όπου α  μια πραγματική σταθερά.
10. Να βρείτε το α ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f  ως προς x  να μηδενίζεται για .
11. Για  , να βρείτε για ποια τιμή του x  ο ρυθμός μεταβολής της f  γίνεται ελάχιστος.
12. Δίνεται η συνάρτηση .
13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
14. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης f .
15. Να μελετήσετε την f  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
16. Να βρείτε το όριο .
17. Δίνεται η συνάρτηση  .
**α)** Να υπολογιστεί το .
**β)** Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
18. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  , στο σημείο της  , είναι παράλληλη στον άξονα x΄x τότε:
**α)** Να δείξετε ότι   και .
**β)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
**γ)** Να υπολογίσετε το όριο .
19. Θεωρούμε τη συνάρτηση  και .
**α)** Να βρείτε τις   και .
**β)** Να υπολογίσετε τις τιμές του   για τις οποίες ισχύει  , για κάθε .
**γ)** Για τη μικρότερη από τις τιμές του λ που βρήκατε στο β) ερώτημα, να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
20. Έστω η συνάρτηση f  με τύπο , με  και .

**α)** Να βρείτε τις τιμές των , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f  να διέρχεται από το σημείο και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης της f  στο σημείο της  να είναι ίση με 4.
**β)** Για  και , υπολογίστε το όριο .
21. Δίνεται η συνάρτηση f  με τύπο .
**α)** Βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης  της εφαπτομένης της καμπύλης της f  σε κάθε σημείο της .
**β)** Για ποια τιμή του x, ο συντελεστής διεύθυνσης   γίνεται ελάχιστος;
**γ)** Υπολογίστε το όριο .
**δ)** Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f  στο σημείο της με τετμημένη .
22. Δίνεται η συνάρτηση f  με τύπο  και .
**α)** Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f  στο σημείο της με τετμημένη .
**β)** Βρείτε τα σημεία Α και Β που η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες x΄x  και y΄y.
**γ)** Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.
**δ)** Αν  , βρείτε το α  ώστε το εμβαδόν  του παραπάνω τριγώνου να είναι μέγιστο.
23. Μία βιομηχανία παράγει ηλιακούς θερμοσίφωνες. Το κόστος   σε ευρώ για την παραγωγή x  προϊόντων σε μία ημέρα δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο . Αν οι εισπράξεις από την πώληση των x  προϊόντων δίνονται από τη σχέση , να βρείτε:
**α)** Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος αν η βιομηχανία δεν παράγει κανένα προϊόν.
**β)** Ποιο είναι το μέγιστο κόστος παραγωγής.
**γ)** Το συνολικό αριθμό των προϊόντων που πρέπει να πουληθούν ώστε η βιομηχανία να έχει το μέγιστο κέρδος.
24. Δίνεται η συνάρτηση , η οποία ικανοποιεί τη σχέση 
 για κάθε .
**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f  είναι παραγωγίσιμη στο  με .
**β)** Αν , τότε:
25. Να αποδείξετε ότι .
26. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη .

**Θέμα Δ**

1. Δίνεται η συνάρτηση .
**α)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο A(9, f(9)) της  .
**β)** Aν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες στα σημεία Β και Γ να υπολογίζετε το μήκος της ΒΓ.
**γ)** Από το σημείο Α φέρνουμε κάθετη στον άξονα x΄x  η οποία τον τέμνει στο σημείο Δ. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης   το οποίο είναι το πλησιέστερο στο σημείο Δ.
2. Δίνεται η συνάρτηση  . Αν η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο Α(2,4) είναι παράλληλη στην ευθεία  .
**α)** Nα βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών λ, μ.
**β)** Για λ = 1  και μ = 2  να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.
3. Ο διευθυντής μιας θεατρικής παράστασης έχει διαπιστώσει ότι όταν η τιμή του εισιτηρίου είναι 8 ευρώ, τότε την παράσταση τη βλέπουν 500 θεατές την εβδομάδα. Κάθε φορά που το εισιτήριο μειώνεται κατά 0,50 ευρώ την εβδομάδα οι θεατές αυξάνονται εβδομαδιαίως

κατα 50.
**α)** Να δείξετε ότι ο αριθμός των θεατών ως συνάρτηση της τιμής x του εισιτηρίου είναι .
**β)** Πόσο πρέπει να είναι το εισιτήριο ώστε το θέατρο να έχει τη μέγιστη δυνατή είσπραξη την εβδομάδα;
**γ)** Πόσοι θεατές παρακολουθούν τότε την παράσταση και πόσα ευρώ είναι μεγαλύτερη η είσπραξη τότε από την είσπραξη όταν το εισιτήριο είναι 8 ευρώ;

1. Δίνεται η συνάρτηση   με πεδίο ορισμού το  και λ μια πραγματική σταθερά.
2. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της   είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  , τότε
**α)** να υπολογίσετε το λ.
**β)** να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.
3. Αν λ = 1 , τότε
**α)** να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f  τέμνει τους άξονες
**β)** να μελετήσετε την f  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
**γ)** να υπολογίσετε το όριο .
4. Δίνεται η συνάρτηση  όπου ο αριθμός λ  είναι το όριο   και ο αριθμός μ  η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  .
5. Να υπολογίσετε τους αριθμούς λ και μ.
6. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f  δεν έχει ακρότατα.
7. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f  στο σημείο   είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g  στο σημείο .
8. Δίνεται συνάρτηση f  συνεχής στο  με  .
**α)** Να βρείτε την τιμή .

**β)** Αν επιπλέον η f  είναι παραγωγίσιμη στο  με , **(1)**
 **i)** να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f  στο

 σημείο ,
 **ii)** να μελετήσετε την f  ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι η συνάρτηση f  έχει δύο

 τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.
 **iii)** Να δείξετε ότι η γραφική παράστασή της f  έχει τρία σημεία όπου η εφαπτομένη είναι

 οριζόντια.

1. Δίνεται η συνάρτηση .
**α)** Να υπολογίσετε τις  και .
**β)** Να δείξετε ότι .
**γ)** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο της 

 είναι η ευθεία ε: .
**δ)** Να βρείτε την τιμή του  , για την οποία η τεταγμένη του σημείου τομής της

 εφαπτομένης του (γ) ερωτήματος, με τον άξονα y΄y είναι μέγιστη.

1. Δίνεται η συνάρτηση  .
**α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.
**β)** Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα x΄x, γωνία .
**γ)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
**δ)** Να δείξετε ότι , για κάθε .
2. Δίνεται η συνάρτηση . Αν η εφαπτομένη   της γραφικής παράστασης στο σημείο με τεταγμένη  , είναι παράλληλη στον άξονα x΄x , τότε:
**α)** Να δείξετε ότι   και να βρείτε την εξίσωση αυτής της εφαπτομένης.
**β)** Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης   της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της , με  είναι η .
**γ)** Αν η εφαπτομένη   τέμνει την   στο σημείο Β και τον άξονα x΄x  στο Γ, να δείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου ΟΓΒΔ (όπου  ), δίνεται από τον τύπο  .
**δ)** Να βρεθεί το σημείο Α της γραφικής παράστασης της f για το οποίο το εμβαδό   γίνεται ελάχιστο.
3. Δίνεται η συνάρτηση .
**α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
**β)** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης   της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη της έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.
**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  στο σημείο της με τετμημένη .
**δ)** Να υπολογίσετε το όριο .
4. Δίνεται η συνάρτηση .
**α)** Να αποδείξετε ότι  για κάθε .
**β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για τις διάφορες τιμές του α.
**γ)** Να αποδείξετε ότι  για κάθε .
**δ)** Αν  να βρείτε σε ποιο σημείο  η γραφική παράσταση  της συνάρτησης f, έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.
5. Δίνεται η συνάρτηση .
**α)** Να αποδείξετε ότι  για κάθε .
**β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
**γ)** Να αποδείξετε ότι  για κάθε .
**δ)** Να βρείτε την τιμή του x  για την οποία η συνάρτηση f, έχει τον ελάχιστο ρυθμό μεταβολής ως προς x. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής;