Μάνος Μαυρογιάννης

2ο **ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

ΘΕΜΑ Α

Α1 . Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(\chi) = g'(\chi)$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ ,

τότε , να αποδείξετε ότι , υπάρχει σταθερά c τέτοια , ώστε για κάθε $\chi \in \Delta$ να ισχύει : $f(\chi) = g(\chi) + c$.

Μονάδες 5

Α2 . Να δώσετε τον ορισμό της μέσης και της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού .

Μονάδες 4

Α3 . Δίνονται οι παρακάτω ισχυρισμοί :

Ισχυρισμός 1 : « Εάν « κοντά » στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$ και ισχύουν : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\big(f(\chi)\cdot g(\chi)\big) = \ell_1 \cdot \ell_2$.»

Ισχυρισμός 2 : «Εάν « κοντά » στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\big(f(\chi)+g(\chi)\big)$ και ισχύουν : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\big(f(\chi)+g(\chi)\big) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi) = \ell_2 - \ell_1$. »

α . Να χαρακτηρίσετε τους παραπάνω ισχυρισμούς γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α , αν είναι αληθείς , ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδείς . (μονάδες 2)

β . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α . (μονάδες 6)

Μονάδες 8

Α4 . Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια ή ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας .

(i) Αν η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής στο Α , τότε η συνάρτηση f δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής στο Α .

(ii) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $|f(\chi)| = g(\chi)$ (1) , όπου $g(\chi) \geq 0$, για κάθε $\chi \in A$ τότε : $f(\chi) = g(\chi)$, για κάθε $\chi \in A$ ή $f(\chi) = -g(\chi)$, για κάθε $\chi \in A$.

(iii) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $|f(\chi)| = g(\chi)$ (1) , όπου $g(\chi) \geq 0$, για κάθε $\chi \in A$ τότε υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση (1) , οι οποίες είναι της μορφής : $f(\chi)=\begin{cases} g(\chi) & , \chi \in A_1 \\ -g(\chi) & , \chi \in A_2 \end{cases}$, όπου $A_1 \cup A_2 = A$.

(iv) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $|f(\chi)| = g(\chi) \ (1)$, όπου $g(\chi) \geq 0$, για κάθε $\chi \in A$ τότε αν η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Α , τότε ισχύει :
$f(\chi) = g(\chi)$, για κάθε $\chi \in A$ ή $f(\chi) = -g(\chi)$, για κάθε $\chi \in A$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : f(\chi) = \dfrac{\alpha^2 \cdot \chi}{\chi^2 + \beta^2}$, όπου $\alpha , \beta > 0$.

Β1 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και η συνάρτηση $g : g(\chi) = \left((f \circ f)(\chi)\right)'$ έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$, χωρίς να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

Μονάδες 6

Β2 . Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Μονάδες 6

Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο διάστημα $\Delta = (-1 , 1)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι :

- η διαφορά των ολικών ακροτάτων της συνάρτηση f ισούται με 2 και
- $\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{4}{3}$

Β3 . Να αποδείξετε ότι : $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 1$ και ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται .

Μονάδες 4

Β4 . Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της .

Μονάδες 5

Β5 . Αν επιπλέον ορίσουμε τη συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta' = \Delta \cup \{-1 , 1\}$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\chi_1 , \chi_2 \in (0 , 1)$, τέτοιοι , ώστε να ισχύει : $\dfrac{1}{f'(\chi_1)} + \dfrac{1}{f'(\chi_2)} = 2$.

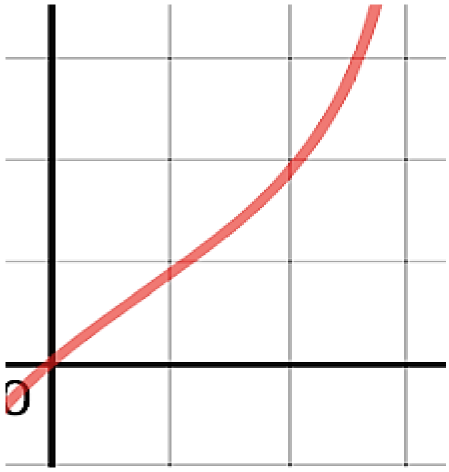
Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi)=\ell n(1+\varepsilon\varphi\chi)$, όπου $\chi\in\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Γ1 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 5



Γ2 . Να αποδείξετε ότι $f(\chi)\ +\ f\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)=\ell n2$, για κάθε $\chi\in\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$. Να μεταφέρετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που δίνεται στο διπλανό σχήμα στο γραπτό σας , και στη συνέχεια , σημειώνοντας όσα στοιχεία της γραφικής θεωρείτε απαραίτητα να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω απόδειξης .
(Θυμίζουμε το γνωστό τύπο της τριγωνομετρίας :
$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$, με $\alpha\neq\kappa\cdot\pi+\frac{\pi}{2}$, $\beta\neq\lambda\cdot\pi+\frac{\pi}{2}$,
$\alpha+\beta\neq\mu\cdot\pi+\frac{\pi}{2}$, όπου $\kappa\ ,\lambda\ ,\mu\in\mathbb{Z}$)

Μονάδες 7

Γ3 . Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A=2\cdot f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{3\cdot\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{32}\right)+f\left(\frac{7\cdot\pi}{32}\right).$$

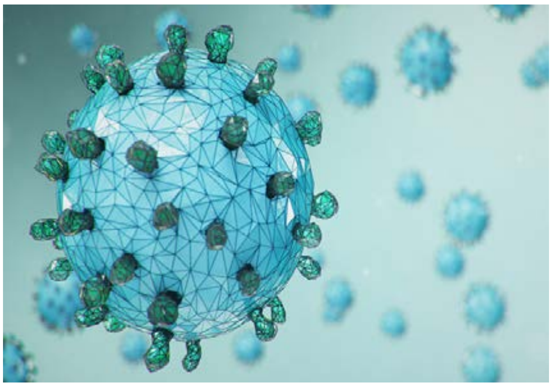
Μονάδες 6

Γ4 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και , εάν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της , να αποδείξετε ότι εξίσωση : $f^{-1}(\chi)=1-\chi$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0\ ,\ \ell n2)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ :

Ο ρυθμός ανάπτυξης του ιού του διπλανού σχήματος στον ανθρώπινο οργανισμό ισούται με $-\mathbf{e}^{-\alpha\cdot \mathbf{t}}\cdot \boldsymbol{\eta\mu}(\boldsymbol{\beta}\cdot \mathbf{t})$, όπου $\mathbf{t}\geq 0$ είναι ο χρόνος σε μήνες και $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ είναι θετικοί σταθεροί πραγματικοί αριθμοί .



Δ1 . Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}(\mathbf{t})$, όπου $\mathbf{f}(\mathbf{t})>0$, παριστάνει την ανάπτυξη του ιού στον ανθρώπινο οργανισμό (μετρημένη σε βακτήρια / mm^3) και είναι της μορφής :
$\mathbf{f}(\mathbf{t})=\boldsymbol{\kappa}\cdot \mathbf{e}^{-\alpha\cdot \mathbf{t}}\cdot \boldsymbol{\eta\mu}(\boldsymbol{\beta}\cdot \mathbf{t})+\boldsymbol{\lambda}\cdot \mathbf{e}^{-\alpha\cdot \mathbf{t}}\cdot \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(\boldsymbol{\beta}\cdot \mathbf{t})$, όπου $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί ,

τότε , αν $\boldsymbol{\eta\mu}(\boldsymbol{\beta}\cdot \mathbf{t})\cdot \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(\boldsymbol{\beta}\cdot \mathbf{t})\neq 0$ και $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}^2(\boldsymbol{\beta}\cdot \mathbf{t})\neq \dfrac{(1-\boldsymbol{\rho})^2}{\boldsymbol{\mu}^2+(1-\boldsymbol{\rho})^2}$, όπου $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\lambda}$,

$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\alpha}$, να υπολογίσετε τους αριθμούς $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}$ ως συνάρτηση των αριθμών $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$.

Μονάδες 6

Δ2 . Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{\mathbf{t}\to+\infty}\mathbf{f}(\mathbf{t})$ και να διατυπώσετε τη φυσική ερμηνεία του αποτελέσματος που βρήκατε . **Μονάδες 5**

Γνωρίζουμε ότι αρχικά υπάρχει στον ανθρώπινο οργανισμό 1 βακτήριο / mm^3 και για το χρονικό διάστημα $\mathbf{t}\in[0\ ,\ 2\cdot\boldsymbol{\pi}]$ ο ρυθμός ανάπτυξης του ιού μηδενίζεται για $\mathbf{t}=2\cdot\boldsymbol{\pi}$ μήνες , τότε :

Δ3 . Να αποδείξετε ότι : $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. **Μονάδες 6**

Δ4 . Να υπολογίσετε το μικρότερο δυνατό χρόνο (με προσέγγιση δεκάτου) , για το χρονικό διάστημα $\mathbf{t}\in[0\ ,\ \boldsymbol{\pi}]$, όπου ο ρυθμός ανάπτυξης του ιού ελαχιστοποιείται και να υπολογίσετε τον ελάχιστο ρυθμό ανάπτυξης του ιού (με προσέγγιση δεκάτου) . **Μονάδες 4**

Δ5 . Να υπολογίσετε , εάν υπάρχει , το όριο : $\lim\limits_{\mathbf{t}\to 0^+}\dfrac{\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}}\right)\cdot \mathbf{f}(\mathbf{t})-\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}}\right)}{\boldsymbol{\eta\mu}\mathbf{t}}$. **Μονάδες 4**

(Δίνονται : $\boldsymbol{\pi}\simeq 3{,}14$, $\sqrt{2}\simeq 1{,}4$, $\mathbf{e}^{0,8}\simeq 2{,}2$)

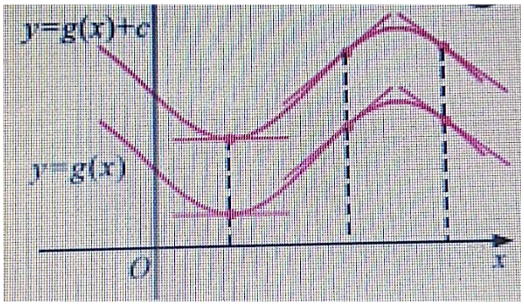
Μάνος Μαυρογιάννης

ΛΥΣΕΙΣ 2ου ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝ. Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

ΘΕΜΑ Α

Α1 . Απόδειξη : Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ **ι**σχύει $(f-g)'(\chi)=f'(\chi)-g'(\chi)=0$. Επομένως , σύμφωνα με γνωστό θεώρημα , η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα , υπάρχει σταθερά c τέτοια , ώστε για κάθε $\chi\in\Delta$ να ισχύει $f(\chi)-g(\chi)=c$, οπότε $f(\chi)=g(\chi)+c$.



Α2 . Αν $S=S(t)$ είναι η συνάρτηση που καθορίζει τη θέση ενός σώματος την τυχαία χρονική στιγμή $t\geq 0$, τότε στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t η μέση ταχύτητα του κινητού θα ορίζεται ως το πηλίκο $\upsilon_\mu=\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$. Ως στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon(t_0)$ ενός κινητού ορίζουμε το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το $t\to t_0$, άρα $\upsilon(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$.

Α3 . Ο **ισχυρισμός 1** είναι ψευδής , διότι αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f:f(\chi)=\sqrt{\chi}$ με $A_f=[0,+\infty)$ και $g:g(\chi)=\sqrt{-\chi}$ με $A_g=(-\infty\ ,\ 0]$, τότε υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{\chi\to 0}f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to 0}g(\chi)$ και είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}g(\chi)=0$, αλλά δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\chi\to 0}\big(f(\chi)\cdot g(\chi)\big)$, διότι η συνάρτηση $f\cdot g$ έχει πεδίο ορισμού $A_f\cap A_g=\{0\}$, οπότε « κοντά » στο $\chi_0=0$ δεν υπάρχουν τιμές για να έχει νόημα η ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{\chi\to 0}\big(f(\chi)\cdot g(\chi)\big)$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> : Ο **ισχυρισμός 1** θα ήταν αληθής , εάν είχε την εξής διατύπωση :

« Εάν « κοντά » στο $\chi_0\in\mathbb{R}$ υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}g(\chi)$ και ισχύουν : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=\ell_1\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}g(\chi)=\ell_2\in\mathbb{R}$, τότε , <u>εάν υπάρχει το όριο</u> $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\big(f(\chi)\cdot g(\chi)\big)$ αναγκαστικά θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\big(f(\chi)\cdot g(\chi)\big)=\ell_1\cdot\ell_2$.»

Ο **ισχυρισμός 2** είναι αληθής , διότι ισχύει : $\mathbf{g}(\chi)=(\mathbf{f}(\chi)+\mathbf{g}(\chi))-\mathbf{f}(\chi)$ και επειδή υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\mathbf{f}(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}(\mathbf{f}(\chi)+\mathbf{g}(\chi))$, τότε θα ισχύει :

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\mathbf{g}(\chi)=\lim_{\chi\to\chi_0}(\mathbf{f}(\chi)+\mathbf{g}(\chi))-\lim_{\chi\to\chi_0}\mathbf{f}(\chi)=\ell_2-\ell_1 .$$

Α4 . (i) Αληθής , διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f: f(\chi)=\begin{cases}1 \ , \ \chi\geq 0\\ -1 \ , \ \chi<0\end{cases}$, τότε ισχύει $f^2(\chi)=1$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σταθερή , ενώ η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, διότι δεν είναι συνεχής στο $\chi_0=0$.

(ii) Ψευδής , διότι αν για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει : $|f(\chi)|=|\chi-1|=g(\chi)$, τότε ο τύπος της συνάρτησης f θα είναι : $f(\chi)=\chi-1$, $\chi\in\mathbb{R}$ ή $f(\chi)=-\chi+1$, $\chi\in\mathbb{R}$ ή

$$f(\chi)=\begin{cases}\chi-1 \ , \ \chi\leq 1\\ -\chi+1 \ , \ \chi>1\end{cases} \quad ή \quad f(\chi)=\begin{cases}-\chi+1 \ , \ \chi\leq 1\\ \chi-1 \ , \ \chi>1\end{cases} .$$

(iii) Ψευδής , διότι αν για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει : $|f(\chi)|=e^{\chi}=g(\chi)$, τότε προφανώς $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε θα ισχύει $f(\chi)=e^{\chi}$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ ή $f(\chi)=-e^{\chi}$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση (1) .

(iv) Αληθής , διότι αν για τη συνεχή συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ισχύει : $f(\chi)>0$, για κάθε $\chi\in A$ τότε $f(\chi)=g(\chi)$, για κάθε $\chi\in A$, ενώ αν ισχύει : $f(\chi)<0$, για κάθε $\chi\in A$ τότε $f(\chi)=-g(\chi)$, για κάθε $\chi\in A$. Αν $f(\chi)=0$, για κάθε $\chi\in A$, τότε και $g(\chi)=0$, για κάθε $\chi\in A$.

ΘΕΜΑ Β

Β1 . Έχουμε : $A_f=\{\chi\in\mathbb{R} \,/\, \chi^2+\beta^2\neq 0\}=\mathbb{R}$, αφού $\beta>0$. Για κάθε $\chi\in\mathbb{R}\Rightarrow-\chi\in\mathbb{R}$ και ισχύει :

$f(-\chi)=\dfrac{\alpha^2\cdot(-\chi)}{(-\chi)^2+\beta^2}=-\dfrac{\alpha^2\cdot\chi}{\chi^2+\beta^2}=-f(\chi)$, οπότε η συνάρτηση f είναι περιττή στο σύνολο $\mathbb{R}$ άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων . Αρκεί να αποδείξουμε ότι και η

συνάρτηση g με $A_g=\mathbb{R}$ είναι άρτια στο σύνολο $\mathbb{R}$. Έχουμε

$g(\chi)=\left(f(f(\chi))\right)'=f'(f(\chi))\cdot f'(\chi)$ και για κάθε $\chi\in\mathbb{R}\Rightarrow-\chi\in\mathbb{R}$ με

$g(-\chi)=f'(f(-\chi))\cdot f'(-\chi)=f'(-f(\chi))\cdot f'(-\chi)$. Από την ισότητα $f(-\chi)=-f(\chi)$

παραγωγίζοντας κατά μέλη παίρνουμε $f'(-\chi)\cdot(-\chi)'=-f'(\chi)\Rightarrow f'(-\chi)=f'(\chi)$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ άρα για $\chi\to f(\chi)\in\mathbb{R}$ έχουμε : $f'(-f(\chi))=f'(f(\chi))$, άρα ισχύει : $g(-\chi)=g(\chi)$, δηλαδή η συνάρτηση g έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$.

Β2 . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$$f'(\chi)=\frac{\alpha^2\cdot(\chi^2+\beta^2)-2\alpha^2\cdot\chi^2}{(\chi^2+\beta^2)^2}=\frac{\alpha^2\cdot(\beta^2-\chi^2)}{(\chi^2+\beta^2)^2}$$

. Έχουμε :

$$f'(\chi)=0\Rightarrow\frac{\alpha^2\cdot(\beta^2-\chi^2)}{(\chi^2+\beta^2)^2}=0\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}\chi=\beta\ \text{ή}\ \chi=-\beta$$

. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\beta\ ,\ \beta]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty\ ,\ -\beta)$ και $(\beta\ ,+\infty)$.

Έχουμε : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}f(\chi)=0$, άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το :

$$f(\mathbb{R})=f((-\infty\ ,\ -\beta))\cup[f(-\beta)\ ,\ f(\beta)]\cup f((\beta\ ,+\infty))=[f(-\beta)\ ,\ f(\beta)]=\left[-\frac{\alpha^2}{2\beta}\ ,\ \frac{\alpha^2}{2\beta}\right]$$

, το οποίο σημαίνει ότι στη θέση $\chi=-\beta$ η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(-\beta)=-\dfrac{\alpha^2}{2\beta}$, ενώ στη θέση $\chi=\beta$ η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(\beta)=\dfrac{\alpha^2}{2\beta}$.

Β3 . Αφού η διαφορά των ολικών ακροτάτων της συνάρτηση f ισούται με 2 θα ισχύει :

$$f(\beta)-f(-\beta)=2\Rightarrow\frac{\alpha^2}{2\beta}-\left(-\frac{\alpha^2}{2\beta}\right)=2\Rightarrow2\cdot\frac{\alpha^2}{2\beta}=2\Rightarrow\alpha^2=2\beta\ (1).$$

Έχουμε επίσης : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{\alpha^2}{2}}{\frac{1}{4}+\beta^2}=\dfrac{2\cdot\alpha^2}{1+4\cdot\beta^2}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\frac{\alpha^2}{3}}{\frac{1}{9}+\beta^2}=\dfrac{3\cdot\alpha^2}{1+9\cdot\beta^2}$, οπότε παίρνουμε :

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\frac{2\cdot\alpha^2}{1+4\cdot\beta^2}}{\frac{3\cdot\alpha^2}{1+9\cdot\beta^2}}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{2\cdot(1+9\cdot\beta^2)}{3\cdot(1+4\cdot\beta^2)}=\frac{4}{3}\Rightarrow1+9\cdot\beta^2=2+8\cdot\beta^2\Rightarrow\beta^2=1\overset{\beta>0}{\Rightarrow}\beta=1$$

. Από τη σχέση (1) παίρνουμε : $\alpha^2=2\overset{\alpha>0}{\Rightarrow}\alpha=\sqrt{2}$. Με $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=1$ η συνάρτηση f γίνεται : $f(\chi)=\dfrac{2\cdot\chi}{\chi^2+1}$ όπου $\chi\in(-1\ ,\ 1)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-1\ ,\ 1)$ με $f'(\chi)=\dfrac{2\cdot(1-\chi^2)}{(\chi^2+1)^2}>0$, για κάθε $\chi\in(-1\ ,\ 1)$, αφού $-1<\chi<1\Rightarrow|\chi|<1\Rightarrow\chi^2<1\Rightarrow1-\chi^2>0$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1\ ,\ 1)$, οπότε και $1-1$, άρα αντιστρέφεται .

Β4 . Θέτουμε : $f(\chi)=\psi=\dfrac{2\cdot\chi}{\chi^2+1} \Rightarrow \psi\cdot\chi^2-2\cdot\chi-\psi=0$ (2) . Αν $\psi=0$, τότε η εξίσωση (2) γίνεται $\chi=0\in(-1\ ,\ 1)$. Αν $\psi\neq 0$, τότε επειδή $\Delta=4\cdot\left(1+\psi^2\right)>0$ η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες

$$\chi=\frac{2+2\cdot\sqrt{1+\psi^2}}{2\cdot\psi}\overset{\psi\neq 0}{\Rightarrow}\chi=\frac{1+\sqrt{1+\psi^2}}{\psi}\quad(3)\quad \text{ή}\quad \chi=\frac{2-2\cdot\sqrt{1+\psi^2}}{2\cdot\psi}\overset{\psi\neq 0}{\Rightarrow}\chi=\frac{1-\sqrt{1+\psi^2}}{\psi}\quad(4)\ .$$

Έχουμε : $f\left((-1\ ,\ 1)\right)=\left(\lim\limits_{\chi\to -1^+}f(\chi)\ ,\ \lim\limits_{\chi\to 1^-}f(\chi)\right)=(-1\ ,\ 1)$, άρα $-1<\psi<1\Rightarrow|\psi|<1\Rightarrow|\psi|-1<0$ (5) .

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η σχέση (3) , τότε θα πρέπει να ισχύει :

$$-1<\chi<1\Rightarrow -1<\frac{1+\sqrt{1+\psi^2}}{\psi}<1\Rightarrow\left|\frac{1+\sqrt{1+\psi^2}}{\psi}\right|<1\Rightarrow 1+\sqrt{1+\psi^2}<|\psi|\Rightarrow\sqrt{1+\psi^2}<|\psi|-1<0$$

, άρα η λύση της σχέσης (3) απορρίπτεται . Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η σχέση (4) , τότε θα πρέπει να ισχύει :

$$-1<\chi<1\Rightarrow -1<\frac{1+\sqrt{1+\psi^2}}{\psi}<1\Rightarrow\left|\frac{1-\sqrt{1+\psi^2}}{\psi}\right|<1\Rightarrow\left|\frac{\left(1-\sqrt{1+\psi^2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{1+\psi^2}\right)}{1+\sqrt{1+\psi^2}}\right|<|\psi|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{1-\left(1+\psi^2\right)}{1+\sqrt{1+\psi^2}}\right|<|\psi|\Rightarrow\left|\frac{\psi^2}{1+\sqrt{1+\psi^2}}\right|<|\psi|\overset{|\psi|>0}{\Rightarrow}|\psi|<1+\sqrt{1+\psi^2}\Rightarrow|\psi|-1<\sqrt{1+\psi^2},$$

, το οποίο προφανώς ισχύει .

Άρα ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}:\ (-1\ ,\ 1)\to(-1\ ,\ 1)$ με τύπο

$$f^{-1}(\chi)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1+\chi^2}}{\chi} & ,\ \chi\in(-1\ ,\ 1)-\{0\}\\ 0 & ,\ \chi=0\end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο σύνολο $(-1\ ,\ 1)-\{0\}$ ως πηλίκο , άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων , αλλά και στο $\chi_0=0$, διότι ισχύει :

$$\lim_{\chi\to 0}f^{-1}(\chi)=\lim_{\chi\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\chi^2}}{\chi}\overset{\text{μορφή } 0/0}{=}\lim_{\chi\to 0}\frac{1-\left(1+\chi^2\right)}{\chi\cdot\left(1+\sqrt{1+\chi^2}\right)}=\lim_{\chi\to 0}\frac{-\chi}{1+\sqrt{1+\chi^2}}=0=f^{-1}(0)$$

. Η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $(-1\ ,\ 1)$.

Β5 . Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0\ ,\ 1]$ ως ρητή , με $f(0)=0\neq f(1)=1$ και , αφού $0<\dfrac{1}{2}<1$, από το Θ. Ε.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(0\ ,\ 1)$ τέτοιο , ώστε : $f(\chi_0)=\dfrac{1}{2}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0\ ,\ \chi_0]$ και $[\chi_0\ ,\ 1]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0\ ,\ \chi_0)$ και $(\chi_0\ ,\ 1)$. Από το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει αριθμός

$\chi_1\in(0\ ,\ \chi_0)\ :\ f'(\chi_1)=\dfrac{f(\chi_0)-f(0)}{\chi_0-0}=\dfrac{1}{2\cdot\chi_0}$ και αριθμός

$\chi_2 \in (\chi_0 \ , \ 1) \ : \ f'(\chi_2) = \dfrac{f(1) - f(\chi_0)}{1 - \chi_0} = \dfrac{1}{2 \cdot (1 - \chi_0)}$, άρα έχουμε :

$\dfrac{1}{f'(\chi_1)} + \dfrac{1}{f'(\chi_2)} = 2 \cdot \chi_0 + 2 \cdot (1 - \chi_0) = 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0 \ , \ \dfrac{\pi}{4}\right]$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(\chi) = \dfrac{(1 + \varepsilon\varphi\chi)'}{1 + \varepsilon\varphi\chi} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot (1 + \varepsilon\varphi\chi)} > 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0 \ , \ \dfrac{\pi}{4}\right]$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το

$f\left(\left[0 \ , \ \dfrac{\pi}{4}\right]\right) = \left[f(0) \ , \ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = [0 \ , \ \ell n2]$.

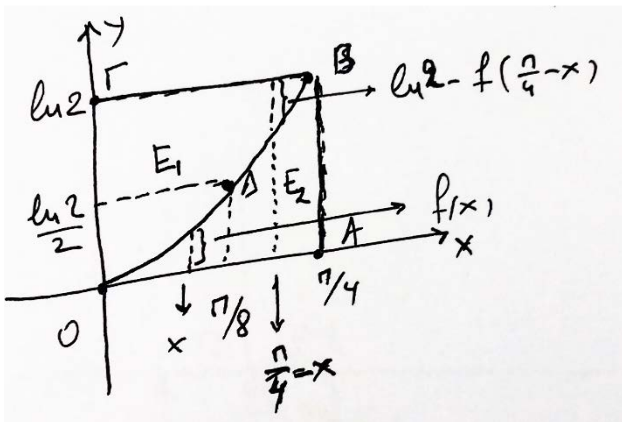
Γ2 . Έχουμε :

$$f(\chi) \ + \ f\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = \ell n(1 + \varepsilon\varphi\chi) + \ell n\left(1 + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right)\right) =$$

$$= \ell n(1 + \varepsilon\varphi\chi) + \ell n\left(1 + \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi\chi}{1 + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon\varphi\chi}\right) = \ell n(1 + \varepsilon\varphi\chi) + \ell n\left(1 + \frac{1 - \varepsilon\varphi\chi}{1 + \varepsilon\varphi\chi}\right) =$$

$$= \ell n(1 + \varepsilon\varphi\chi) + \ell n\left(\frac{2}{1 + \varepsilon\varphi\chi}\right) = \ell n(1 + \varepsilon\varphi\chi) + \ell n2 - \ell n(1 + \varepsilon\varphi\chi) = \ell n2 \ .$$

Αν θεωρήσουμε το ορθογώνιο $\mathrm{OAB\Gamma}$ με κορυφές $\mathrm{O}(0 \ , \ 0)$, $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{4} \ , \ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{4} \ , \ \ell n2\right)$, $\Gamma(0 \ , \ \ell n2)$ από την παραπάνω σχέση που αποδείξαμε προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι συμμετρική ως προς το σημείο $\Delta\left(\dfrac{\pi}{8} \ , \ \dfrac{\ell n2}{2}\right)$, δηλαδή το κέντρο του ορθογωνίου , οπότε τα εμβαδά E_1 , E_2 των χωρίων που χωρίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f το ορθογώνιο $\mathrm{OAB\Gamma}$ είναι ίσα μεταξύ τους , δηλαδή ισχύει : $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2$.



Γ3 . Ισχύει : $f(\chi)\ +\ f\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)=\ell n2$, για κάθε $\chi\in\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$, οπότε , διαδοχικά παίρνουμε :

$$\left.\begin{cases}\text{Για }\ \chi=\frac{\pi}{8}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{8}\right)\ +\ f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)=\ell n2\Rightarrow 2\cdot f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\ell n2\\ \text{Για }\ \chi=\frac{\pi}{16}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{16}\right)\ +\ f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}\right)=\ell n2\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{16}\right)\ +\ f\left(\frac{3\cdot\pi}{16}\right)=\ell n2\\ \text{Για }\ \chi=\frac{\pi}{32}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{32}\right)\ +\ f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{32}\right)=\ell n2\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{32}\right)\ +\ f\left(\frac{7\cdot\pi}{32}\right)=\ \ell n2\end{cases}\right]\xrightarrow{(+)} A=3\cdot\ell n2$$

Γ4 . Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα , άρα και $1-1$ στο διάστημα $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$,

οπότε αντιστρέφεται και ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}:[0\ ,\ \ell n2]\to\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$. Θεωρούμε

τη συνάρτηση $h:h(\chi)=f^{-1}(\chi)-1+\chi$ ορισμένη στο σύνολο

$[0\ ,\ \ell n2]\cap\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]=[0\ ,\ \ell n2]$ η οποία είναι συνεχής στο $[0\ ,\ \ell n2]$ ως διαφορά

συνεχών συναρτήσεων . Επίσης έχουμε : $h(0)=f^{-1}(0)-1\overset{f(0)=0}{=}0-1=-1<0$ και

$h(\ell n2)=f^{-1}(\ell n2)-1+\ell n2\overset{f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ell n2}{=}\frac{\pi}{4}-1+\ell n2>0$, διότι για $\boldsymbol{\pi}\simeq 3{,}14\Rightarrow\frac{\boldsymbol{\pi}}{4}-1\simeq-0{,}2$,

άρα $\ell n2-0{,}2>0\Rightarrow\ell n2>0{,}2=\frac{1}{5}\Rightarrow 5\cdot\ell n2>1\Rightarrow\ell n2^5>\ell ne\Rightarrow 2^5=32>e$, το οποίο

ισχύει , αφού $e\simeq 2{,}7$. Έχουμε λοιπόν $h(0)\cdot h(\ell n2)<0$, άρα από Θ. Bolzano θα

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(0\ ,\ell n2)$: $h(\chi_0)=0$. Θα αποδείξουμε ότι οι

συναρτήσεις f , f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας στο πεδίο ορισμού τους .
Έχουμε αποδείξει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα , στο διάστημα

$\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$. Θα αποδείξουμε ότι και η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα , στο

διάστημα $[0\ ,\ \ell n2]$, δηλαδή , για κάθε $\chi_1\ ,\chi_2\in[0\ ,\ \ell n2]$ με $\chi_1<\chi_2$ ότι θα ισχύει :

$f^{-1}(\chi_1)<f^{-1}(\chi_2)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\chi_1\ ,\chi_2\in[0\ ,\ \ell n2]$ με $\chi_1<\chi_2$ θα ισχύει :

$f^{-1}(\chi_1)\geq f^{-1}(\chi_2)$. Τότε θα ισχύει : $f\left(f^{-1}(\chi_1)\right)\geq f\left(f^{-1}(\chi_2)\right)\Rightarrow\chi_1>\chi_2$, το οποίο είναι

άτοπο , άρα θα ισχύει $f^{-1}(\chi_1)<f^{-1}(\chi_2)$ για κάθε $\chi_1<\chi_2$, άρα η συνάρτηση f^{-1} είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0\ ,\ \ell n2]$. Έτσι για κάθε $\chi_1\ ,\chi_2\in[0\ ,\ \ell n2]$ με $\chi_1<\chi_2$

έχουμε $f^{-1}(\chi_1)<f^{-1}(\chi_2)$ και $\chi_1-1<\chi_2-1$, οπότε , με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $h(\chi_1)<h(\chi_2)$, δηλαδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα , άρα και $1-1$ στο $(0\ ,\ \ell n2)$, οπότε το χ_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(\chi)=0$ στο διάστημα $(0\ ,\ \ell n2)$.

ΘΕΜΑ Δ :

Δ1 . Ο ρυθμός ανάπτυξης του ιού στον ανθρώπινο οργανισμό είναι $\mathbf{f'(t)=-e^{-\alpha\cdot t}\cdot \eta\mu(\beta\cdot t)}$ βακτήρια / mm^3 . μήνα

Έχουμε :

$$\mathbf{f(t)=\kappa\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\eta\mu(\beta\cdot t)+\lambda\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot t)\Rightarrow f'(t)=}$$
$$\mathbf{=-\alpha\cdot\kappa\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\eta\mu(\beta\cdot t)+\kappa\cdot\beta\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot t)-\lambda\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot t)-\lambda\cdot\beta\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\eta\mu(\beta\cdot t)=}$$
$$\mathbf{=-(\alpha\cdot\kappa+\lambda\cdot\beta)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\eta\mu(\beta\cdot t)+(\kappa\cdot\beta-\lambda\cdot\alpha)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot t)}$$

Επειδή $\mathbf{f'(t)=-e^{-\alpha\cdot t}\cdot\eta\mu(\beta\cdot t)}$ και $\mathbf{\eta\mu(\beta\cdot t)\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot t)}\neq 0$, αναγκαστικά θα ισχύει

$$\left\{\begin{matrix}\mathbf{\kappa\cdot\alpha+\lambda\cdot\beta=1}\\ \mathbf{\kappa\cdot\beta-\lambda\cdot\alpha=0}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\beta} & -\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}=-(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2)<0\ ,\ \mathbf{D_\kappa}=\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{\beta}\\ 0 & -\boldsymbol{\alpha}\end{vmatrix}=-\boldsymbol{\alpha}\ ,\ \mathbf{D_\lambda}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha} & 1\\ \boldsymbol{\beta} & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{\beta}$$

, οπότε παίρνουμε : $\boldsymbol{\kappa}=\dfrac{\mathbf{D_\kappa}}{\mathbf{D}}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}$, $\boldsymbol{\lambda}=\dfrac{\mathbf{D_\lambda}}{\mathbf{D}}=\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}$.

Δ2 . Έχουμε : $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbf{f(t)}=\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}\cdot\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\mathbf{\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\eta\mu(\beta\cdot t)+\beta\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot t)}\right)=0$, διότι :

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\mathbf{\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\eta\mu(\beta\cdot t)}\right)=\boldsymbol{\alpha}\cdot\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathbf{\eta\mu(\beta\cdot t)}}{\mathbf{e^{-\alpha\cdot t}}}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής , αφού

$-\mathbf{1}\leq\mathbf{\eta\mu(\beta\cdot t)}\leq 1\Rightarrow-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^{\alpha\cdot t}}}\leq\dfrac{\mathbf{\eta\mu(\beta\cdot t)}}{\mathbf{e^{\alpha\cdot t}}}\leq\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^{\alpha\cdot t}}}$ και $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\mathbf{e^{\alpha\cdot t}}\right)\overset{\alpha>0}{=}+\infty\Rightarrow\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^{\alpha\cdot t}}}\right)=0$.

Όμοια παίρνουμε ότι : $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\mathbf{\beta\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot t)}\right)=0$. Το αποτέλεσμα που βρήκαμε , δηλαδή , ότι $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbf{f(t)}=0$, σημαίνει ότι ύστερα από πάρα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα $(\mathbf{t}\to+\infty)$ η συνάρτηση $\mathbf{f(t)}$, δηλαδή , η ανάπτυξη του ιού στον ανθρώπινο οργανισμό τείνει να μηδενιστεί , δηλαδή να μην υπάρχουν καθόλου βακτήρια του ιού στον άνθρωπο .

Δ3 . Ισχύουν : $\mathbf{f}(0)=1 \Rightarrow \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2}=1 \Rightarrow \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2$ **(1)** και

$\mathbf{f}'(2\boldsymbol{\pi})=0 \Rightarrow \boldsymbol{\eta\mu}(2\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\beta})=0 \Rightarrow 2\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\pi}$ **(2)** , $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}$, αλλά επειδή

$\mathbf{0}\le \mathbf{t}\le 2\cdot\boldsymbol{\pi} \Rightarrow \mathbf{0}\le \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\pi}\le 2\cdot\boldsymbol{\pi} \Rightarrow \mathbf{0}\le\boldsymbol{\mu}\le 2 \overset{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} \boldsymbol{\mu}=0\ ,\ 1\ ,\ 2$ **.**

- Αν $\boldsymbol{\mu}=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boldsymbol{\beta}=0$, η οποία λύση απορρίπτεται διότι $\boldsymbol{\beta}>0$.
- Αν $\boldsymbol{\mu}=1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boldsymbol{\beta}=\dfrac{1}{2}$, η οποία λύση είναι δεκτή και από τη σχέση **(1)** δίνει

  $\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\alpha}^2+\dfrac{1}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^2=\dfrac{1}{4} \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{2}$ **.**
- Αν $\boldsymbol{\mu}=2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boldsymbol{\beta}=1$, η οποία λύση απορρίπτεται διότι από τη σχέση **(1)** δίνει

  $1=\boldsymbol{\alpha}^2+1 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}=0$, το οποίο δεν ισχύει , $\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}$. Άρα έχουμε : $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Δ4 . Για $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, ρυθμός ανάπτυξης του ιού είναι $\mathbf{f}'(\mathbf{t})=-\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/2}\cdot\boldsymbol{\eta\mu}\left(\dfrac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right)$, όπου

$\mathbf{t}\ge 0$. Για να βρούμε το χρόνο που ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $\mathbf{f}'$ θα πάρουμε

$$\mathbf{f}''(\mathbf{t})=\left(-\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/2}\cdot\boldsymbol{\eta\mu}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right)\right)'=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/2}\cdot\boldsymbol{\eta\mu}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/2}\cdot\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/2}\cdot\left(\boldsymbol{\eta\mu}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right)-\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right)\right)$$

Έχουμε :

$$\mathbf{f}''(\mathbf{t})=0 \overset{\mathbf{e}^{-\mathbf{t}/2}>0}{\Rightarrow} \boldsymbol{\eta\mu}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right)=\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right) \overset{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)\neq 0}{\Rightarrow} \boldsymbol{\varepsilon\varphi}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}\right)=1=\boldsymbol{\varepsilon\varphi}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right) \Rightarrow \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{2}}=\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\pi}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{t}=2\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\pi}+\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\ ,\ \mathbf{t}\ge 0\ ,\ \boldsymbol{\rho}\in\mathbb{N}\ \mathbf{.}$$

Για $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{0}$ παίρνουμε το μικρότερο δυνατό χρόνο $\mathbf{t}_{\min}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2}\simeq \mathbf{1{,}5}$ **μήνες** για τον οποίο ισχύει :

$$\mathbf{0}\le\mathbf{t}\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{2} \Rightarrow \mathbf{0}\le\frac{\mathbf{t}}{2}\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{4} \overset{\boldsymbol{\varepsilon\varphi}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)\nearrow}{\Rightarrow} \boldsymbol{\varepsilon\varphi}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)\le\boldsymbol{\varepsilon\varphi}\frac{\boldsymbol{\pi}}{4}=1 \overset{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)>0}{\Rightarrow} \boldsymbol{\eta\mu}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)\le\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{f}''(\mathbf{t})\le 0 \text{ και}$$

$$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}<\mathbf{t}\le\boldsymbol{\pi} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{\pi}}{4}<\frac{\mathbf{t}}{2}\le\frac{\boldsymbol{\pi}}{2} \overset{\boldsymbol{\varepsilon\varphi}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)\nearrow}{\Rightarrow} \boldsymbol{\varepsilon\varphi}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)>\boldsymbol{\varepsilon\varphi}\frac{\boldsymbol{\pi}}{4}=1 \overset{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)>0}{\Rightarrow} \boldsymbol{\eta\mu}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)>\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{f}''(\mathbf{t})>0\ .$$

Ο ελάχιστος ρυθμό ανάπτυξης του ιού είναι

$$\mathbf{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\mathbf{e}^{-\pi/4}\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\mathbf{e}^{0,8}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1,4}{2\cdot 2,2}=-\frac{1,4}{4,4}\simeq -0,3$$ βακτήρια / mm³ . μήνα

Δ5 .

Έχουμε : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot f(t)-f\left(\frac{1}{t}\right)}{\eta\mu t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\dfrac{f(t)-1}{t}\cdot\dfrac{1}{\frac{\eta\mu t}{t}}\right]=\ell$,

- $\lim\limits_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)\overset{\frac{1}{t}=u\to+\infty}{=}\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=0$, από το ερώτημα **Δ2** .
- $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{f(t)-1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}\right)=f'(0)=0$
- $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\eta\mu t}{t}=1$, οπότε τελικά παίρνουμε : $\ell=0$.