16η Επαναληπτική

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)=\ln x+\int_1^e \frac{f(t)}{(3-e)x}dt-1$ για κάθε $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,\ x>0$.

ii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x\ln x+1=x(\alpha+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

iii Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=e^x+\ln x$ και $h(x)=\frac{xe^x+x-1}{x}$ τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο, το οποίο και να βρείτε.

iv. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $e^2\left(\ln x+\frac{1}{2x}\right)\le(e-1)x+2e$ για κάθε $x\ge 2$.

v. Να δείξετε ότι $\left(\frac{4}{5}\right)^{20}<e^{-1}$.

vi. Να βρείτε συνάρτηση φ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $x\varphi'(x)+2\varphi(x)=2f(x)$ για κάθε $x>0$ και $\varphi(1)=\frac{1}{2}$.

vii. Να δείξετε ότι $f(x)\le\frac{(x-1)^2}{x}$ για κάθε $x>0$.

viii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+(x-1)^{10}=0$ για κάθε $x>0$.

ix. Σημείο Μ κινείται επί της C_f και απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα 2 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $B(1,0)$.

Λύση

i. Είναι $\int_1^e f(t)dt=\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε:

$$f(x)=\ln x+\int_1^e\frac{f(t)}{(3-e)x}dt-1=\ln x+\frac{1}{(3-e)x}\int_1^e f(t)dt-1=\ln x+\frac{\lambda}{(3-e)x}-1 \text{ και}$$

$$\int_1^e f(t)dt=\lambda\Leftrightarrow\int_1^e\left(\ln t+\frac{\lambda}{(3-e)t}-1\right)dt=\lambda\Leftrightarrow\int_1^e\ln t\,dt+\frac{\lambda}{(3-e)}\int_1^e\frac{1}{t}dt-e+1=\lambda\Leftrightarrow$$

$$\int_1^e\ln t\,(t)'\,dt+\frac{\lambda}{(3-e)}[\ln t]_1^e-e+1=\lambda\Leftrightarrow[t\ln t]_1^e-\int_1^e\frac{1}{t}\cdot t\,dt+\frac{\lambda}{(3-e)}-e+1=\lambda\Leftrightarrow$$

$$\cancel{e}-[t]_1^e-\cancel{e}+1=\lambda-\frac{\lambda}{3-e}\Leftrightarrow 2-e=\lambda\left(1-\frac{1}{3-e}\right)\Leftrightarrow\cancel{2-e}=\lambda\frac{\cancel{2-e}}{3-e}\Leftrightarrow\lambda=3-e \text{ και}$$

$$f(x)=\ln x+\frac{\cancel{3-e}}{\cancel{(3-e)}x}-1=\ln x+\frac{1}{x}-1,\ x>0.$$

ii. $x\ln x+1=x(\alpha+1)\Leftrightarrow x\ln x+1=x\alpha+x\Leftrightarrow x\ln x+1-x=\alpha x\Leftrightarrow\ln x+\frac{1}{x}-1=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$.

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Είναι $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to0^+}\left[(x\ln x+1-x)\frac{1}{x}\right]=1(+\infty)=+\infty$ γιατί

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)=+\infty+0-1=+\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=(f(1),+\infty)=(0,+\infty)$. Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(f(1),+\infty)=(0,+\infty)$.

- Αν $\alpha<0$ τότε το α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha=0$ τότε $\alpha\notin f(\Delta_1)$ και $\alpha\notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη στα διαστήματα Δ_1,Δ_2. Επειδή $f(1)=0$, η εξίσωση $f(x)=\alpha=1$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x=1$.
- Αν $\alpha>0$ τότε $\alpha\in f(\Delta_1)$ και $\alpha\in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1 και ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2, οπότε έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iii. Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow e^x+\ln x=\frac{xe^x+x-1}{x}\Leftrightarrow\cancel{e^x}+\ln x=\cancel{e^x}+1-\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=0.$$

Επειδή για κάθε $x\in\Delta_1\cup\Delta_2$ είναι $f(x)>0$ και $f(1)=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=h(x)$. Είναι $g(1)=e^1+\ln1=e$, οπότε το σημείο τομής τους είναι το $(1,e)$.

iv. Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$, $f'(e)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}$ και $f(e)=\frac{1}{e}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$ είναι η ευθεία ε: $y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y=\frac{e-1}{e^2}x-1+\frac{2}{e}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{-x+2}{x^3}$.

Για κάθε $x>2$ είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[2,+\infty)$ και βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$f(x)\le\frac{e-1}{e^2}x-1+\frac{2}{e}\Leftrightarrow e^2f(x)\le(e-1)x-e^2+2e\Leftrightarrow$

$e^2\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)\le(e-1)x-e^2+2e\Leftrightarrow e^2\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)-\cancel{e^2}\le(e-1)x-\cancel{e^2}+2e\Leftrightarrow$

$e^2\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\le(e-1)x+2e$ για κάθε $x\ge 2$.

v. $\left(\frac{4}{5}\right)^{20}<e^{-1}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{20}<\ln e^{-1}\Leftrightarrow 20(\ln 4-\ln 5)<-1\Leftrightarrow\ln 4-\ln 5<-\frac{1}{20}\Leftrightarrow\ln 4<\ln 5-\frac{1}{20}\Leftrightarrow$

$\ln 4+\frac{1}{4}-1<\ln 5+\frac{1}{4}-1-\frac{1}{20}\Leftrightarrow f(4)<\ln 5-1+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(4)<f(5)$ που ισχύει αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

vi. $x\varphi'(x)+2\varphi(x)=2f(x)\Leftrightarrow x^2\varphi'(x)+2x\varphi(x)=2x\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)\Leftrightarrow\left(x^2\varphi(x)\right)'=2x\ln x+2-2x\Leftrightarrow$

$\left(x^2\varphi(x)\right)'=\left(x^2\right)'\ln x+x+2-3x\Leftrightarrow\left(x^2\varphi(x)\right)'=\left(x^2\ln x+2x-\frac{3}{2}x^2\right)'\Leftrightarrow$

$x^2\varphi(x)=x^2\ln x+2x-\frac{3}{2}x^2+c\Leftrightarrow\varphi(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{3}{2}+\frac{c}{x^2},\ c\in\mathbb{R}$.

$\varphi(1)=2-\frac{3}{2}+c\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+c\Leftrightarrow c=0$ και $\varphi(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{3}{2},\ x>0$.

vii. $f(x)\le\frac{(x-1)^2}{x}\Leftrightarrow\ln x+\frac{1}{x}-1\le\frac{x^2-2x+1}{x}\Leftrightarrow\ln x+\cancel{\frac{1}{x}}-1\le x-2+\cancel{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\ln x\le x-1$ ισχύει.

viii. $f(x)+(x-1)^{10}=0$

Είναι $(x-1)^{10}\ge 0$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Επίσης $f(x)\ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, άρα $f(x)+(x-1)^{10}>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Επειδή $f(1)+(1-1)^{10}=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)+(x-1)^{10}=0$.

ix. Έστω $M(x(t),y(t))$, όπου $y(t)=\ln x(t)+\frac{1}{x(t)}-1$ με $y'(t)=\frac{x'(t)}{x(t)}-\frac{x'(t)}{x^2(t)}$.

Η απόσταση του Μ από την αρχή των αξόνων είναι $s(t)=(OM)(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$.

Είναι $s'(t)=\frac{2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Β, τότε $x(t_0)=1$ και $y(t_0)=0$.

Επειδή το Μ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα 2 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο ισχύει ότι $s'(t_0)=2$, άρα $\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=2 \Leftrightarrow \frac{1\cdot x'(t_0)+0\cdot y'(t_0)}{\sqrt{1+0}}=2 \Leftrightarrow x'(t_0)=2$ μ.μ./sec