22η Άσκηση

Ανισώσεις 2ου Βαθμού

α) Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες το 2 και το 3.

β) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\left(\frac{1821}{1453}\right)^2 - 5\cdot\frac{1821}{1453} + 6$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{1821}{1453}\right)^2 - 5\cdot\frac{1821}{1453} > \left(\frac{2019}{1003}\right)^2 - 5\cdot\frac{2019}{1003}$$

γ) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\sqrt[6]{71}$ είναι λύση της ανίσωσης $x^2 - 5x + 6 < 0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left|x^2 - 5x + 6\right| = x^2 - 5x + 6$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\left(x^2 - 5x\right)^2 + 10\left(x^2 - 5x\right) + 24 < 0$

στ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $x^2 - 5x + 6 > \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S=2+3=5$ και γινόμενο ριζών $P=2\cdot 3=6$, οπότε είναι η $x^2-5x+6=0$.

β) Παρατηρούμε ότι η παράσταση $\left(\frac{1821}{1453}\right)^2-5\cdot\frac{1821}{1453}+6$ είναι η τιμή του τριωνύμου x^2-5x+6 για $x=\frac{1821}{1453}$. Για το λόγο αυτό θα βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου.

x	$-\infty$ $\quad\frac{1821}{1453}$	2 $\quad\frac{2019}{1003}$	3 $\quad +\infty$
x^2-5x+6	+	-	+

Επειδή $\frac{1821}{1453}<2$, από τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου προκύπτει ότι $\left(\frac{1821}{1453}\right)^2-5\cdot\frac{1821}{1453}+6>0$

Είναι $\left(\frac{1821}{1453}\right)^2-5\cdot\frac{1821}{1453}>\left(\frac{2019}{1003}\right)^2-5\cdot\frac{2019}{1003}\Leftrightarrow\left(\frac{1821}{1453}\right)^2-5\cdot\frac{1821}{1453}+6>\left(\frac{2019}{1003}\right)^2-5\cdot\frac{2019}{1003}+6$

Είναι $2<\frac{2019}{1003}<3$, οπότε από τον πίνακα προσήμων προκύπτει ότι $\left(\frac{2019}{1003}\right)^2-5\cdot\frac{2019}{1003}+6<0$,

άρα $\left(\frac{1821}{1453}\right)^2-5\cdot\frac{1821}{1453}+6>0>\left(\frac{2019}{1003}\right)^2-5\cdot\frac{2019}{1003}+6$

γ) Με βάση τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου ισχύει ότι: $x^2-5x+6<0\Leftrightarrow 2<x<3$.
Για να είναι ο αριθμός $\sqrt[6]{71}$ λύση της ανίσωσης πρέπει
$2<\sqrt[6]{71}<3\Leftrightarrow 2^6<\left(\sqrt[6]{71}\right)^6<3^6\Leftrightarrow 64<71<729$ που ισχύει.

δ) $\left|x^2-5x+6\right|=x^2-5x+6\Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$ ή $x\geq 3$

ε) Θέτουμε $x^2-5x=\omega$ και η ανίσωση γίνεται: $\omega^2+10\omega+24<0$
Το τριώνυμο $\omega^2+10\omega+24$ έχει $\Delta=4>0,\ \omega_1=-6,\ \omega_2=-4$, άρα
$x^2-5x=-6\ (1)$ ή $x^2-5x=-4\ (2)$
$(1)\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$,
$(2)\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$

στ) $x^2-5x+6>\lambda\Leftrightarrow x^2-5x+6-\lambda>0$ (3)
Το τριώνυμο $x^2-5x+6-\lambda$ έχει διακρίνουσα $\Delta=25-4(6-\lambda)=25-24+4\lambda=1+4\lambda$.
Η (3) αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (δηλαδή το τριώνυμο $x^2-5x+6-\lambda$ διατηρεί σταθερό πρόσημο) μόνο όταν $\Delta<0\Leftrightarrow 1+4\lambda<0\Leftrightarrow 4\lambda<-1\Leftrightarrow\lambda<-\frac{1}{4}$.