ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 αι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο C_f ,αν για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_1 είναι θέση σημείου καμπής της f »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

Απάντηση

α) Ψ

β) π.χ. $f(x)=x^4,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$. Είναι $f''(0)=0$, όμως $f''(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει σημείο καμπής στο 0.

Α3. Να *γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση :*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)f(\beta)>0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β) .

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Απάντηση

Α3. δ

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx=G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)<f(x_2)$

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Απάντηση

Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

Θέμα Β

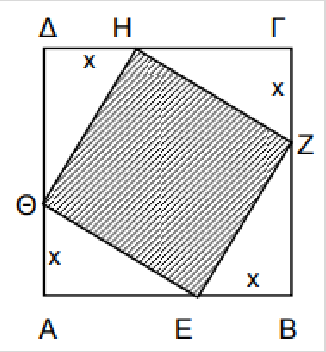
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm.
Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ :

Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου Ε Ζ ΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2$.

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0\in[0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0}+1\ cm^2$.



Λύση

Β1. Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι:

$$EZ^2=EB^2+ZB^2=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2\Leftrightarrow$$

$$EZ=\sqrt{2x^2-4x+4},\ 0\le x\le 2$$

Β2. $f(x)=EZ^2=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2$

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=4x-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=2$ και τοπικά μέγιστα τα $f(0)=4$ και $f(2)=4$, οπότε έχει μέγιστο το 4.

Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου γίνεται ελάχιστο για x=1 και μέγιστο για x=0,2.

Β4. Επειδή η f έχει ελάχιστο το 2 και μέγιστο το 4, είναι $2\le f(x)\le 4$ για κάθε $x\in[0,2]$.

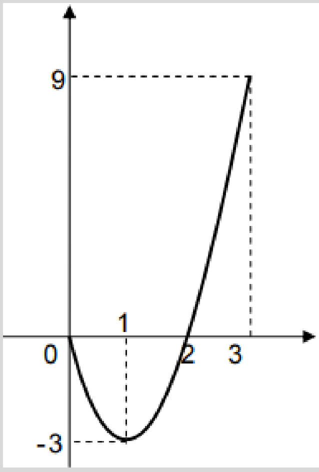
$0\le x\le 2\Leftrightarrow e^0\le e^x\le e^2\Leftrightarrow 4\le 4e^x\le 4e^2\Leftrightarrow 5\le 4e^x+1\le 4e^2+1$, άρα η συνάρτηση $g(x)=4e^x+1,\ x\in[0,2]$ έχει σύνολο τιμών το $g([0,2])=[5,4e^2+1]$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g έχουν διαφορετικές τιμές, δεν υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2,\ f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2,\ f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$.

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Λύση

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και δεν εφαρμόζεται το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα αυτό, ισχύει ότι $f(3) = f(0) = 2$.

$$E = -\int_0^2 f'(x)dx + \int_2^3 f'(x)dx = 8 \Leftrightarrow -f(2)+f(0)+f(3)-f(2) = 8 \Leftrightarrow -2f(2)+2+2 = 8 \Leftrightarrow f(2) = -2 .$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(1)}{1} = -3 ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)} \underset{\substack{x\to 0 \Rightarrow \\ u\to 0^-}}{\overset{f'(x)=u}{=}} \lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u} = -\infty$$

Γ2. Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0,2]$.

Για κάθε $x \in (2,3)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2,3]$.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 2 το $f(2) = -2$ και τοπικά μέγιστα τα $f(0) = 2$ και $f(3) = 2$.

$f' \searrow [0,1]$ και f συνεχής, άρα η f είναι κοίλη στο $[0,1]$.

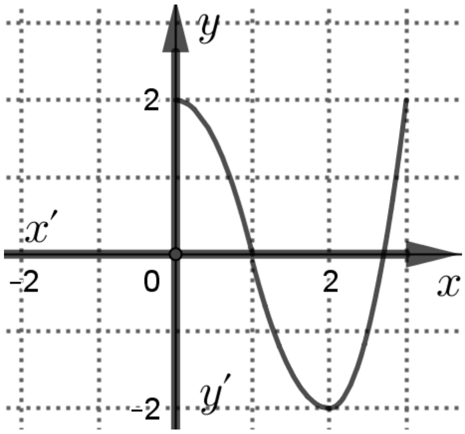
$f' \nearrow [1,3]$ και f συνεχής, άρα η f είναι κυρτή στο $[1,3]$. Η f έχει σημείο καμπής το $(1, f(1)) \equiv (1,0)$

Γ3. Είναι $f(2)f(3)=-4<0$ και f συνεχής, άρα υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Είναι $2<x<x_0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(x_0)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to x_0^-\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$

Είναι $x_0<x<3\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(x_0)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to x_0^-\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$

Γ4.



Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{ημx}{x}+α, & -\dfrac{π}{2}\le x<0\\ 2, & x=0\\ x^3-3x^2+2, & x>0\end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0,2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $α\in\mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $π<\int_{-\frac{π}{2}}^{2}f(x)dx<\dfrac{3π}{2}-1$.

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(-\dfrac{π}{2}x\right)=f\left(\dfrac{-π}{2}e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

Λύση

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,2]$ ως πολυωνυμική και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2=f(0)\Rightarrow$ f είναι συνεχής στο $[0,2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=3x^2-6x$, οπότε εφαρμόζονται για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Δ2. Επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι συνεχής στο $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{ημx}{x}+α\right)=-1+α$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow -1+α=2\Leftrightarrow α=3$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[0,2]$.

Για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[2,+\infty)$.

Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{π}{2},0\right)$ είναι $f'(x)=-\dfrac{xσυνx-ημx}{x^2}$.

Έστω $h(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$. Είναι $h'(x)=-x\eta\mu x$.

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι $\eta\mu x<0$ άρα $h'(x)>0\Rightarrow h\searrow\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

$-\frac{\pi}{2}<x<0\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)>h(0)=0$ άρα $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Δ4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3-3x+2\right)dx=$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+\left[\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right]_0^2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx+4-8+4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx$$

Είναι $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\ge f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow 2\le f(x)\le 3-\frac{2}{\pi}$ Και επειδή υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες δεν ισχύει η ισότητα, είναι:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3-\frac{2}{\pi}\right)dx\Leftrightarrow 2\cdot\frac{\pi}{2}<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\frac{\pi}{2}\left(3-\frac{2}{\pi}\right)\Leftrightarrow\ \pi<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)dx<\frac{3\pi}{2}-1$$

Δ5. Είναι $0<x<1\Leftrightarrow 0>-\frac{\pi}{2}x>-\frac{\pi}{2}$ και όμοια $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}e^{-x}<0$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ είναι και 1-1.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\cancel{-\frac{\pi}{2}}x=\cancel{-\frac{\pi}{2}}e^{-x}\Leftrightarrow x=e^{-x}\Leftrightarrow x-e^{-x}=0$$

Έστω $g(x)=x-e^{-x},\ x\in[0,1]$.

Είναι $g(0)=-1$, $g(1)=1-\frac{1}{e}>0$, δηλαδή $g(0)g(1)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Είναι $g'(x)=1+e^{-x}>0\Rightarrow g\nearrow[0,1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.