

**Διαγώνισμα στα πολυώνυμα.**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Αν  $f(x) = -6x^3 + x^2 + 5x - 2$  α) Να λυθεί η  $f(x) = 0$  β) Να λυθεί η  $f(x) \leq 0$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} + \sqrt[2015]{x^{2015} - 2016x + 2015} = 0$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - 2$  με  $\alpha, \beta$  ακέραιους έχει ρίζες δυο περιττούς ακέραιους να βρείτε τα  $\alpha, \beta$  και αν  $\alpha = 0$  και  $\beta = 1$  να λυθεί η  $P(x) \leq 0$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω  $\kappa$  και  $\lambda$  οι βαθμοί των πολυωνύμων  $P(x), Q(x)$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $P(x^2 - 1) = (x^3 + 1) \cdot Q(x + 1)$  για κάθε  $x$  πραγματικό και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $Q(x) : (x - 3)$  είναι 1.

α) Αν τα πολυώνυμα είναι του ίδιου βαθμού να βρεθεί ο βαθμός τους.

β) Να αποδειχθεί ότι αν  $\kappa < 3$  τότε και  $\lambda < 3$ ,

γ) Να αποδειχθεί ότι το  $Q(x)$  είναι περιττού βαθμού.

δ) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x) : (x - 3)$

**μ 1**

)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(-6x^2 + 7x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$x = -1 \quad -6x^2 + 7x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{2}{3}$

-6	1	5	-2	-1
	6	-7	2	
-6	7	-2	0	

)

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
x+1	-	○	+	+	+
$-6x^2 + 7x - 2$	-	-	○	+	○
μ	+	○	-	○	-

**μ 2**

$\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geq 0, \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} \geq 0, \sqrt[2015]{x^{2015} - 2016x + 2015} \geq 0,$   
 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} + \sqrt[2015]{x^{2015} - 2016x + 2015} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 0 \\ \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} = 0 \\ \sqrt[2015]{x^{2015} - 2016x + 2015} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x^{2015} - 2016x + 2015 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (x-1)(x-4) = 0 \\ x^{2015} - 2016x + 2015 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \quad x = 4 \\ 1^{2015} - 2016 \cdot 1 + 2015 = 0 \end{cases} \quad \cdot \quad x = 1$$

**μ 3**

$P(x) = 0 \quad \pm 1, \pm 2.$

$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - + - 2 = 0 \\ 1 + + - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - + = 1 \\ + = 1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \begin{cases} - + + + = 2 \\ + = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} = 1 \\ = 0 \end{cases}$

$P(x) = x^4 + x^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 - 1)(x^2 + 2) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

**μ 4**

$P(x) \quad \mu, \quad P(x^2 - 1) \quad 2 \quad \mu.$

$Q(x) \quad \mu, \quad Q(x+1) \quad \mu \quad (x^3 + 1)Q(x+1)$

$+3 \quad \mu.$

$P(x^2 - 1) = (x^3 + 1)Q(x+1) \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu$

$P(x^2 - 1) \quad (x^3 + 1)Q(x+1) \quad \mu, \quad 2 = +3.$

)  $= \quad 2 = +3 \Leftrightarrow = 3$

$$) \quad = \frac{+3}{2} < 3 \Leftrightarrow +3 < 6 \Leftrightarrow < 3$$

$$) \quad Q(x):(x-3) \quad 1, \quad Q(3)=1$$

$$x=2 \quad P(2^2-1)=(2^3+1)Q(2+1) \Leftrightarrow P(3)=9Q(3)=9,$$

$$P(x):(x-3) \quad 9.$$