ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΥΛΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΘΕΜΑ Α

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής
2. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h=f\cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.
3. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.
4. Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

   α) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ β) $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$

5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$.
6. Αν οι συναρτήσεις $f-g$ και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
7. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\Delta$.
8. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$.

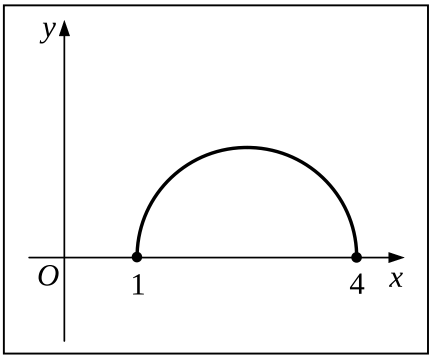
   Ασκησόπολις
   ο πιο πλούσιος κόσμος
   θεμάτων και ασκήσεων
9. Αν στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει $f'(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι τοπικό ακρότατο της f.
10. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' ,υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f.
11. Αν $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχουν δύο διαφορετικές εφαπτόμενες της C_f παράλληλες μεταξύ τους.
12. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, τότε ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.
13. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:

i) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$

ii) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,4)$

iv) υπάρχει $x_0 \in (1,4)$: $f'(x_0) = 0$.



(μ 16x1,5)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu^3 x + \alpha x + 1, & x < 0 \\ 2\eta\mu^2 x - x^2 + x + \alpha, & x \geq 0 \end{cases}$.

Β1. Να βρείτε τη τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. μονάδες 7

Έστω $\alpha = 1$.

Β2. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$. μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι **δεν** εφαρμόζεται για την f το Θεώρημα Rolle στο $[-\pi, \pi]$. μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, \pi)$. μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1) = 1$, $f(x) \neq 0$ και $xf'(x) + 2f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(x) < \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 1$. μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\alpha}, \alpha\right)$, $\alpha > 1$ τέτοιο, ώστε $\alpha f'(\xi) + \alpha^2 + 1 < 0$. μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε το πρόσημο της f. μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f. μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$. μονάδες 7

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής. μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. μονάδες 6

Καλή Τύχη!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

1. Σ 2. Λ 3. Σ 4.β 5.Λ 6. Σ 7.Λ 8. Λ 9. Λ 10. Σ 11. Λ 12. Λ 13i. Σ ii.Λ iii.Λ iv.Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(2\eta\mu^3 x + \alpha x + 1\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\eta\mu^2 x - x^2 + x + \alpha\right) = \alpha = f(0)$.

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-\pi, 0)$ και $(0, \pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ και αυτό συμβαίνει όταν $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \alpha = 1$

Β2. Είναι $f(-\pi) = 2\eta\mu^3\pi - \pi + 1 = 1 - \pi < 0$, $f(0) = 1$, δηλαδή $f(-\pi)f(0) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, λόγω του θ.Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Β3. Είναι $f(\pi) = 2\eta\mu^2\pi - \pi^2 + \pi + 1 = -\pi^2 - \pi + 1$.

Επειδή $f(-\pi) \neq f(\pi)$ δεν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\pi, \pi]$.

Β4. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\eta\mu^3 x + x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(2\eta\mu^2 x\dfrac{\eta\mu x}{x} + 1\right) = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\eta\mu^2 x - x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\eta\mu x\dfrac{\eta\mu x}{x} - x + 1\right) = 1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, 0)$ με $f'(x) = 6\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x + 1$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f'(x) = 4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 2x + 1$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, \pi)$. (x_1, x_2) $f(\pi)f(0) < 0$

Είναι $f(\pi) = 2\eta\mu^2\pi - \pi^2 + \pi + 1 = -\pi^2 + \pi + 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$ δηλαδή και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, λόγω του θ.Bolzano υπάρχει $x_2 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο και $f(x_1) = f(x_2) = 0$, λόγω του θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (-\pi, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $g(x) = x^2 f(x) - 1$, $x \in (0, +\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = x\left(2f(x) + xf'(x)\right) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στ $(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = f(1) - 1 = 0$.

Για κάθε $x > 1 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow x^2 f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < \dfrac{1}{x^2}$ και

για κάθε $0 < x < 1 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow x^2 f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{1}{x^2}$.

Γ2. Από το θεώρημα μέσης τιμής για την f, υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\alpha}, \alpha\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}\left(f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \quad (1)$$

Επειδή $\alpha > 1$ είναι $f(\alpha) < \frac{1}{\alpha^2}$ και επειδή $\frac{1}{\alpha} < 1$, είναι $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) > \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = \alpha^2 \Leftrightarrow -f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < -\alpha^2$,

άρα $f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < \frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 = \frac{1-\alpha^4}{\alpha^2}$.

Επειδή για $\alpha > 1$ είναι $\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} > 0$, έχουμε: $\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}\left(f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) < \frac{\cancel{\alpha}}{\alpha^2 - 1} \cdot \frac{1-\alpha^4}{\alpha^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow$

$$f'(\xi) < \frac{\cancel{(1-\alpha^2)}(1+\alpha^2)}{-\cancel{(1-\alpha^2)}\alpha} \Leftrightarrow f'(\xi) < -\frac{1+\alpha^2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) < -1 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) + \alpha^2 + 1 < 0.$$

Γ3. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Επειδή $f(1) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Γ4. Επειδή $f(x) > \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, άρα και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, οπότε η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επειδή $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, θα είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, άρα η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = \left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow$

$\left(e^x f'(x) - e^x\right)' = \left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c \Leftrightarrow e^x f'(x) - xf'(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$ (1)

Για $x = 0$ η (1) γίνεται: $0 = 1 + c \Leftrightarrow c = -1$, άρα

$e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow \left(e^x - x\right)f'(x) = e^x - 1$ (2)

Έστω $g(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x - 1$.

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0) = 1$, άρα $g(x) \geq g(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g(x) \neq 0$ και η (2) γίνεται:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{\left(e^x - x\right)'}{e^x - x} \overset{e^x - x \geq 1 > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \ln\left(e^x - x\right) + c',\ c' \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c' \Leftrightarrow c' = 0$, άρα $f(x) = \ln\left(e^x - x\right),\ x \in \mathbb{R}$.

Δ2. $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x-x}\ge 0 \overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow} e^x-1\ge 0 \Leftrightarrow e^x\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 0$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$, άρα $f(x)\ge f(0)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

Δ3. $f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\left(\dfrac{e^x-x+x-1}{e^x-x}\right)'=\left(1+\dfrac{x-1}{e^x-x}\right)'=\dfrac{e^x-x-(x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}\Leftrightarrow$

$f''(x)=\dfrac{e^x-x-xe^x+x+e^x-1}{(e^x-x)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}$

Έστω $h(x)=2e^x-xe^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x(1-x)$.

$h'(x)\ge 0 \Leftrightarrow e^x(1-x)\ge 0 \Leftrightarrow 1-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$

Για κάθε $x<1$ είναι $h'(x)>0 \Rightarrow h\nearrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>1$ είναι $h'(x)<0 \Rightarrow h\searrow[0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=-1$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x(2-x)-1\right)=-\infty$ και $h(1)=e-1$

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $h(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(0)\right]=(-1,e-1]$.

Επειδή $0\in(-1,e-1)$ υπάρχει $x_1\in(-\infty,0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=0$ και $h\nearrow(-\infty,0]$ άρα το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της h στο $(-\infty,0]$

Στο διάστημα $\Delta_2=[0,+\infty)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $h(\Delta_2)=\left[h(0),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=[-1,+\infty)$.

Επειδή $0\in(-1,+\infty)$ υπάρχει $x_2\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=0$ και $h\searrow[0,+\infty)$ άρα το x_2 είναι η μοναδική ρίζα της h στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x<x_1 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)<h(x_1)=0 \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty,x_1]$.

Για κάθε $x_1<x<0 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x_1)<h(x) \Leftrightarrow h(x)>0 \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[x_1,0]$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(x_1,f(x_1))$.

Για κάθε $0<x<x_2 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x)>h(x_2)=0 \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[0,x_2]$.

Για κάθε $x>x_2 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x)<h(x_2)=0 \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $[x_2,+\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(x_2,f(x_2))$.

Δ4. Έστω $\varphi(x)=\ln\left(e^x-x\right)-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $\varphi(0)=-1<0$ και $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Από το Γ1 είναι $g\nearrow[0,+\infty)$ και $\frac{\pi}{2}>0\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right)>g(0)\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}>1\Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>\ln 1\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$

Επειδή $\varphi(0)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και η φ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, λόγω του Θ.Bolzano υπάρχει $x_3\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_3)=0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $\varphi'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}+\eta\mu x>0$, αφού $f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}>0$ και $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η x_3 είναι η μοναδική ρίζα της $\varphi(x)=0$.