Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

12ο Διαγώνισμα

30 - 5 - 2020

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$.

μονάδες 5

Α2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$.

μονάδες 5

Α3. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

μονάδες 3

Α4. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α5. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^2(x)-1=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε το λάθος στη παρακάτω διαδικασία: $f^2(x)-1=0\Leftrightarrow f^2(x)=1\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{1}\Leftrightarrow|f(x)|=1\Leftrightarrow f(x)=\pm1$, άρα $f(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-1,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 4

Α6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν ορίζεται η σύνθεση της f με την g ($g\circ f$) , τότε έχει πεδίο ορισμού το $A_{g\circ f}=f(A)\cap A_g$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε με κατάλληλο παράδειγμα την απάντησή σας στο ερώτημα α..

μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1},\ x\in[-1,1]$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Β2. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{4}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες μία θετική και μία αρνητική.

μονάδες 3+3

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f έχουν αντίθετες κλίσεις.

μονάδες 5

Β4. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ τέτοιοι ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}-\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{8}{2\ln2-1}$.

μονάδες 6

Β5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{e^{(x^2+1)f(x)}}-1}{\text{συν}\left(\dfrac{x(x^2+1)f(x)}{\ln(x^2+1)}\right)-1}$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Ο ρυθμός μεταβολής των φορέων ενός ιού, παγκόσμια λόγω επιδημίας, δίνεται σε δεκάδες εκατομμύρια ανά μήνα από τη σχέση $k'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\text{εφ}\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\text{συν}\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}$, $0 \le t \le 2\pi$, όπου $t = 0$ είναι η χρονική στιγμή που ξεκινά η μετάδοση του ιού.

Γ1. Να βρείτε πιο χρονικό διάστημα ο ρυθμός μεταβολής των φορέων του ιού είναι θετικός.

μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε τη συνάρτηση k της εκτίμησης του πλήθους των φορέων του ιού παγκοσμίως και να αποδείξετε ότι στο τέλος της χρονικής περιόδου ο ιός έχει εξαλειφθεί.

μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε πότε ο αριθμός των φορέων είναι μέγιστος.

μονάδες 7

Γ4. Αν η εκτίμηση για τον αριθμό των φορέων που δεν θα καταφέρουν να αναρρώσουν από τον ιό είναι 1%, να βρείτε πόσοι από τους φορείς του ιού θα καταφέρουν να αναρρώσουν, όταν ο αριθμός των φορέων του ιού είναι μέγιστος. Δίνεται ότι $\sqrt{2} \simeq 1,41$.

μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) = x\ln x - \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να βρείτε τους δυνατούς τύπους της f.

μονάδες 5

Έστω ότι $f(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}$, $x > 0$

Δ2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη.

μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, αν γνωρίζετε ότι $\lim_{x\to 0}(x\ln x) = 0$.

μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

μονάδες 3

Δ5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) = 4 - x^2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

μονάδες 6

Καλή τύχη!