ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$ και για $h\neq 0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$, επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$$, άρα $(cf(x))'=cf'(x)$

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

Α3. Διακριτή είναι η μεταβλητή που παίρνει μεμονωμένες τιμές.
Συνεχής είναι η μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β).

Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το ύψος της πρώτης κλάσης είναι 12, άρα $\nu_1=12$, αντίστοιχα τα ύψη της 2ης, 3ης, 4ης κλάσης αντίστοιχα είναι 8, 14 και 6, άρα $\nu_2=8$, $\nu_3=14$ και $\nu_4=6$.
Για το πλήθος ν των παρατηρήσεων, ισχύει: $\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=12+8+14+6=40$.

Β2. Είναι $f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{12}{40}=0{,}30$, $f_2=\frac{\nu_2}{\nu}=\frac{8}{40}=0{,}20$, $f_3=\frac{\nu_3}{\nu}=\frac{14}{40}=0{,}35$ και $f_4=\frac{\nu_4}{\nu}=\frac{6}{40}=0{,}15$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
$[2,4)$	3	12	0,30
$[4,6)$	5	8	0,20
$[6,8)$	7	14	0,35
$[8,10)$	9	6	0,15
Σύνολο		40	1

Β3. α) $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{40}=\frac{3\cdot 12+5\cdot 8+7\cdot 14+9\cdot 6}{40}=\frac{36+40+98+54}{40}=\frac{228}{40}=5{,}7$ χιλ. ευρώ

β) Επειδή οι τιμές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις, οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις από 4,5 έως 6 χιλιάδες ευρώ είναι τα $\frac{6-4{,}5}{6-4}=\frac{1{,}5}{2}=\frac{3}{4}$ της κλάσης $[4,6)$.

Άρα πωλήσεις από 4,5 έως 6 χιλιάδες ευρώ έκαναν $\frac{3}{4}\nu_2=6$ πωλητές.

Επειδή πωλήσεις από 6 έως 8 χιλιάδες ευρώ έκαναν 14 πωλητές και από 8 έως 10 χιλιάδες ευρώ έκαναν 6 πωλητές, τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ πωλήσεις έκαναν $6+14+6=26$ πωλητές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=12x^2-7x+1$.

Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq\frac{1}{4}$ ή $x\geq\frac{1}{3}$

x	$-\infty$ $1/4$	$1/3$	$+\infty$
f'	+	–	+
f	↗	↘	↗

Για κάθε $x<\frac{1}{4}$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow \left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$

Για κάθε $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$.

Για κάθε $x>\frac{1}{3}$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow \left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1=\frac{1}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=\frac{1}{3}$.

Είναι $P(K)=x_1=\frac{1}{4}$ και $P(A)=x_2=\frac{1}{3}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα Κ,Α,Π είναι ασυμβίβαστα ισχύει ότι:

$$P(A)+P(K)+P(\Pi)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+P(\Pi)=1 \Leftrightarrow P(\Pi)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

Γ2. Είναι $\Gamma=K\cup A$ και επειδή τα Κ, Α είναι ασυμβίβαστα ισχύει ότι:

$$P(\Gamma)=P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

- Για το ενδεχόμενο Δ, έχουμε:

Α΄τρόπος

Αν η μπάλα δεν είναι ούτε κόκκινη, ούτε άσπρη, τότε υποχρεωτικά θα είναι πράσινη, άρα $P(\Delta)=P(\Pi)=\frac{5}{12}$.

Β΄ τρόπος: $P(\Delta)=P\left[(K\cup A)'\right]=1-P(K\cup A)\overset{K\cap A=\varnothing}{=}1-P(K)-P(A)=\frac{5}{12}$

- Για το ενδεχόμενο Ε έχουμε:

Α΄τρόπος: $P(A\cup\Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap\Pi')=\frac{1}{3}+1-\frac{5}{12}-P(A-\Pi)\Leftrightarrow$

$$P(A\cup\Pi')=\frac{1}{3}+1-\frac{5}{12}-P(A)=\cancel{\frac{1}{3}}+1-\frac{5}{12}-\cancel{\frac{1}{3}}=\frac{7}{12}$$

Β΄ τρόπος: Είναι $E=A\cup\Pi'=A\cup(A\cup K)$

Επειδή $A\subseteq A\cup K$, είναι $A\cup(A\cup K)=A\cup K$, άρα

$$P(E)=P(A\cup(A\cup K))=P(A\cup K)=P(A)+P(K)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

Γ3. Α΄τρόπος: Είναι $N(A)=N(\Pi)-4$

$$\overset{N(\Omega)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}-\frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow$$

$$P(A)=P(\Pi)-\frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}=\frac{5}{12}-\frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)}=\frac{1}{12} \Leftrightarrow N(\Omega)=48$$

Β΄ τρόπος: Έστω ότι $N(\Pi)=x$, τότε $N(A)=x-4$

$$P(A)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-4}{N(\Omega)}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\frac{N(\Omega)+12}{3} \; (1) \; P(\Pi)=\frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{N(\Omega)}=\frac{5}{12} \Leftrightarrow$$

$$5N(\Omega)=12x \overset{(1)}{\Rightarrow} 5N(\Omega)=12\frac{N(\Omega)+12}{3} \Leftrightarrow \ldots N(\Omega)=48$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω y η άλλη πλευρά της βάσης. Επειδή η περίμετρος της βάσης είναι 20 dm, ισχύει ότι:
$2x+2y=20 \Leftrightarrow y=10-x$, οπότε το εμβαδόν της βάσης είναι: $E_\beta=x(10-x)=10x-x^2$
Η παράπλευρη επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου αποτελείται από 4 ορθογώνια.
Τα δύο έχουν πλευρές 5dm , $(10-x)$ dm και εμβαδόν $5(10-x)=(50-5x)dm^2$,
Τα άλλα δύο έχουν πλευρές 5dm, xdm και εμβαδόν $5x\ dm^2$, άρα
$E_\pi=2\cdot 5x+2(50-5x)=100$
Το ολικό εμβαδό είναι $E(x)=E_\pi+E_\beta=100+10x-x^2,\ x\in(0,10)$.
Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ με $E'(x)=-2x+10$.
$E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -2x+10\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 5$
Για κάθε $x<5$ είναι $E'(x)>0 \Rightarrow E\uparrow(0,5]$ και για κάθε $x>5$ είναι $E'(x)<0 \Rightarrow E\downarrow[5,10)$.
Η E παρουσιάζει μέγιστο για $x=5$, άρα η ολική επιφάνεια μεγιστοποιείται για $x=5dm$

Δ2. α) $2s^2-5s+2=0 \Leftrightarrow s=2$ ή $s=\frac{1}{2}$.

Αν $s=\frac{1}{2}$, τότε $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{1}{16}<10\%$, το δείγμα τιμών είναι ομοιογενές, οπότε η $s=\frac{1}{2}$ απορρίπτεται.

Αν $s=2$, τότε $CV=\frac{2}{8}=25\%>10\%$, άρα το δείγμα τιμών δεν είναι ομοιογενές, οπότε η $s=2$ είναι δεκτή.

β) Είναι $s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right\} \Leftrightarrow s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu^2} \Leftrightarrow s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\bar{x}^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2=4+64=68 \Leftrightarrow \overline{x^2}=68$$

Δ3. Επειδή η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $[5,10)$, έχουμε:

$x_1 < x_2 < ... < x_{15} \Leftrightarrow E(x_1) > E(x_2) > ... > E(x_{15})$,

άρα $R = E(x_1) - E(x_{15}) = E(5) - E(9) = 16$

Είναι $y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 144 + 1 \Leftrightarrow x_i^2 - 14x_i + 45 < 0 \Leftrightarrow$
$5 < x_i < 9$,

άρα $B = \{A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), ..., A_{14}(x_{14}, y_{14})\}$ με $N(B) = 13$.

Επειδή $N(\Omega) = 15$, είναι $P(B) = \frac{13}{15}$.