

# Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



**Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:**

**Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς**

**Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς**

**Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας**



**2019 - 2020**



**Ασκησόπολις**  
ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

## 6ο Διαγώνισμα

18 - 4 -2020

## Θέμα Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

μονάδες 7

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;

μονάδες 4

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0 \text{.} \text{»}$$

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 4

**A4.** Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$  και η εφαπτομένη της  $\varepsilon$ , στο σημείο  $A(3, f(3))$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ . Δίνεται επίσης η συνάρτηση

$$g(x) = x^2 - \frac{9}{x}, x \neq 0. \text{ Να υπολογίσετε:}$$

**α)** Τα  $f(3), f'(3)$

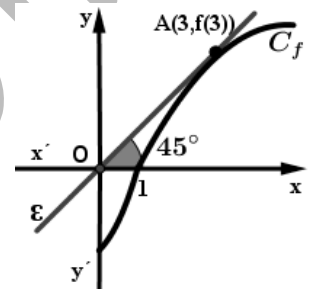
μονάδες 3

**β)** τα  $(f \circ f)'(3), g(f(3)), (g \circ f)'(3)$

μονάδες 3

**γ)** Τα  $(g+f)'(3), (g \cdot f)'(3)$

μονάδες 4



## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + \beta x + \gamma}{x - \alpha}$ ,  $\beta < \gamma + 1$  για την οποία ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

**B1.** Να δείξετε ότι  $\alpha = -1, \beta = 1$ .

μονάδες 6

**B2. α)** Να δείξετε ότι  $(f \circ g)(x) = \frac{x^2 + 3x + \gamma + 2}{x + 2}$ ,  $x \neq -2$ , όπου  $g(x) = x + 1$ .

**β)** Αν η γραφική παράσταση της  $f \circ g$  τέμνει τον  $y'y$  στο σημείο  $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$ , να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

μονάδες 3+2

$$\text{Αν } f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} :$$

**B3.** Να βρείτε την εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  που διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(-1, 0)$ .

μονάδες 5

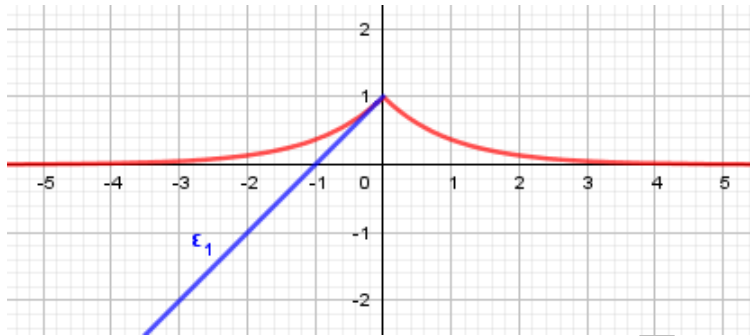
**B4. α)** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

μονάδες 3+3

### Θέμα Γ

Έστω η άρτια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1]$ , συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έστω  $a: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $a(x) = f(x)$ ,  $x \leq 0$  και  $b: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $b(x) = f(x)$ ,  $x \geq 0$ . Δίνεται επίσης η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η ευθεία  $\epsilon_1$  που είναι εφαπτομένη της  $a$  στο σημείο  $A(0,1)$ .

**Γ1.** Να βρείτε την εφαπτομένη ημιευθεία  $\epsilon_2$  της  $C_b$  στο  $A(0,1)$  για  $x \geq 0$ . Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η  $g$  είναι παραγωγίσιμη.

μονάδες 7

**Γ2.** Χρησιμοποιώντας το σχήμα, να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

**Γ3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες και στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης.

μονάδες 5

**Γ4.** Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi-1) + \xi f'(\xi-1) + 1 = 4\xi$ .

μονάδες 5

**Γ5.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\eta \mu f(x) - f(x)}$ .

μονάδες 4

### Θέμα Δ

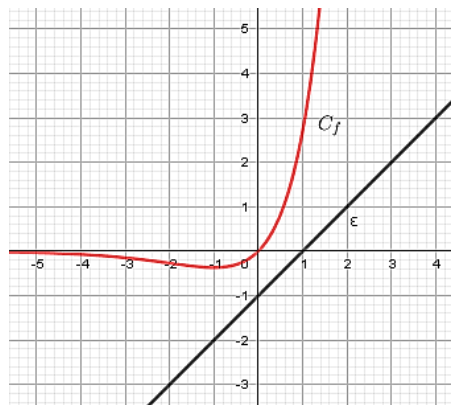
Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) = 2xf(x) + x^2 e^x (e^x - 2)$  για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ ,  $f(1) = e$ ,  $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$  και η ευθεία  $\epsilon: y = x - 1$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(x) = x \cdot e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 9

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και η ευθεία  $\epsilon$ .



Δ2. Να βρείτε την ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$  και της ευθείας  $\epsilon$ .

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$  και της ευθείας  $\epsilon$ .

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι :  $e^6 < \frac{5 \cdot e^5 + 7 \cdot e^7}{12}$

Μονάδες 5

Καλή τύχη!

ASKISOPOLIS