Θέματα γραπτών προαγωγικών εξετάσεων
στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης β΄ Λυκείου

ΘΕΜΑ 1°

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση : $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(μονάδες 10)

Β. Να δοθεί ο ορισμός της έλλειψης.

(μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ii. Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$

iii. Αν είναι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

iv. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του επιπέδου και (x,y) τότε οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

v. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους), τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, όπου $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

(μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$.

(μονάδες 8)

δ) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$.

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται τα σημεία Β(-3,7), Γ(3,1) και οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - y + 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + y - 7 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Να βρεθούν :

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ και η γωνία που σχηματίζει η ΒΓ με τον άξονα x΄x.

(μονάδες 4)

β) Η εξίσωση της ΒΓ.

(μονάδες 3)

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου Α.

(μονάδες 6)

δ) Η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ και η γωνία των ευθειών ΑΜ, ΒΓ.

(μονάδες 6)

ε) Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 2^2$ και η ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Ποιες είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1 και C_2 από την ευθεία;

(μονάδες 8)

β) Για ποιες τιμές των λ και β η ευθεία εφάπτεται και στους δύο κύκλους;

(μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60^0.

(μονάδες 9)

Καλή Επιτυχία!

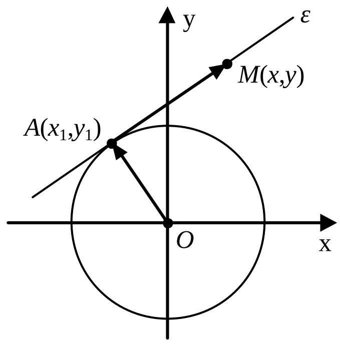
Ο Εισηγητής

Ο Διευθυντής

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$.



Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AM}$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}=0 . \qquad (1)$$

Όμως $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$ και $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1)$. Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$

$$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$$

$$xx_1+yy_1=\rho^2, \qquad \text{αφού} \quad x_1^2+y_1^2=\rho^2.$$

Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$$

Β. Έστω E' και Ε δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και Ε ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και Ε είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με 2α και την απόσταση των εστιών E' και Ε με 2γ. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται εστιακή απόσταση της έλλειψης.

Γ. i. Σ   ii. Λ   iii. Σ   iv.Σ   v. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

β) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4\vec{\beta}^2=2+1-2-4=-3$

γ) $|\vec{u}|^2=\left|2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+16\vec{\beta}^2=4|\vec{\alpha}|^2+16\left(-\dfrac{1}{2}\right)+16|\vec{\beta}|^2=12\Leftrightarrow$

$|\vec{u}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$|\vec{v}|^2=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=1+1+1=3\Leftrightarrow|\vec{v}|=\sqrt{3}$

δ) $\text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-3}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\dfrac{1}{2}$ άρα $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$

ΘΕΜΑ 3ο

α) $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{1-7}{3+3}=-1$, άρα $\varepsilon\varphi\omega=-1\Rightarrow\omega=135^\circ$

β) ΒΓ: $y-1=-(x-3)\Leftrightarrow y=-x+4$

γ) $\begin{cases}3x-y+2=0\\2x+y-7=0\ (1)\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}5x-5=0\Leftrightarrow x=1$ και από την (1) $\Rightarrow 2+y-7=0\Leftrightarrow y=5$, άρα Α(1,5).

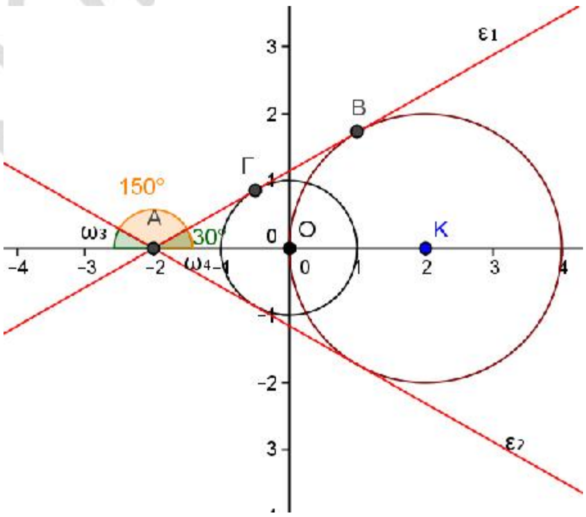
δ) $x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=0$ και $y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=4$, δηλαδή Μ (0,4)

Είναι $\lambda_{AM}=\dfrac{5-4}{1-0}=1$ και ΑΜ: $y-4=x\Leftrightarrow y=x+4$

ε) $\lambda_{AB}=\dfrac{7-5}{-3-1}=-\dfrac{1}{2}$ και $AB\perp\Gamma\Delta\Leftrightarrow\lambda_{AB}\cdot\lambda_{\Gamma\Delta}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\Gamma\Delta}=2$, άρα

ΓΔ: $y-1=2(x-3)\Leftrightarrow y=2x-5$

ΘΕΜΑ 4ο



α) Ο C_1 έχει κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα $\rho_1=1$

ενώ ο C_2 έχει κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα $\rho_2=2$.

β) $d(O,\varepsilon)=\dfrac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ και $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|2\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$

γ) Πρέπει $d(O,\varepsilon)=\rho_1$ και $d(K,\varepsilon)=\rho_2$

Είναι $d(O,\varepsilon)=\rho_1=1\Leftrightarrow|\beta|=\sqrt{\lambda^2+1}$ (1) και

$d(K,\varepsilon)=\rho_2\Leftrightarrow\dfrac{|2\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\Leftrightarrow|2\lambda+\beta|=2\sqrt{\lambda^2+1}\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$|2\lambda+\beta|=2|\beta|\Leftrightarrow 2\lambda+\beta=2\beta\Leftrightarrow\beta=2\lambda$ ή $2\lambda+\beta=-2\beta\Leftrightarrow\beta=-\dfrac{2\lambda}{3}$

Αν $\beta=2\lambda$ τότε η (1) γίνεται: $|2\lambda|=\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow4\lambda^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow3\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda^2=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Για $\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ είναι $\beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon_1: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, ενώ

για $\lambda=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ είναι $\beta=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon_2: y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Έστω ω_1, ω_2οι γωνίες που σχηματίζουν οι ε_1, ε_2 με τον άξονα x΄x.

Είναι $\varepsilon\varphi\omega_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\omega_1=30^\circ$ και $\varepsilon\varphi\omega_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\omega_2=150^\circ$ άρα $\omega_3=30^\circ$ και

$\omega_4=\omega_3=30^\circ$ ως κατακορυφήν. Η γωνία των εφαπτομένων αποτελείται από τις γωνίες ω_1 και ω_4 άρα είναι 60°.