

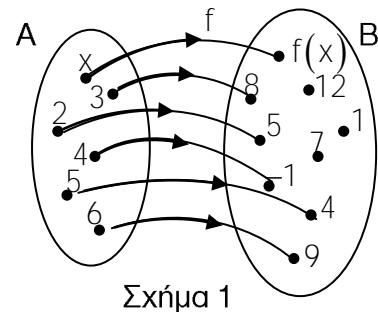
Ορισμός συνάρτησης

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

- Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα γράμματα f, g, h , κτλ. του Λατινικού αλφαριθμού.

- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

Όταν μας δοθεί μια συνάρτηση, ανεξάρτητα από το τι ζητείται από αυτήν, το πρώτο μας μέλημα είναι να βρούμε το πεδίο ορισμού της έτσι ώστε να γνωρίζουμε τις τιμές που θα χρησιμοποιηθούν στην αντιστοίχηση.



- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές μιας συνάρτησης f για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$.

- Αν με μια συνάρτηση f το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$.

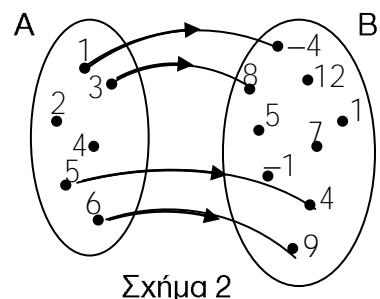
Το γράμμα x που παριστάνει οποιαδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

- Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται με $f : A \rightarrow B$ ή $x \rightarrow f(x)$.

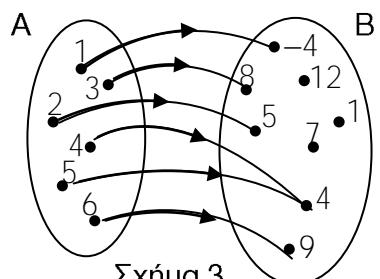
Γενικά:

Μια διαδικασία από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B παριστάνει συνάρτηση, όταν:

✓ Όλα τα στοιχεία του A αντιστοιχίζονται σε στοιχεία του B . Το σχήμα 1 παριστάνει συνάρτηση ενώ το σχήμα 2 όχι.



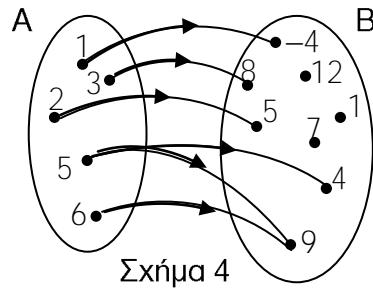
✓ Κάποια από τα στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της συνάρτησης.



✓ Δύο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B . Για παράδειγμα το σχήμα 3 είναι συνάρτηση.

✓ Κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του B .

Για παράδειγμα τα σχήματα 1,2,3 παριστάνουν συναρτήσεις, ενώ το σχήμα 4 όχι.



Μεθοδολογία ασκήσεων

Πεδίο ορισμού

- Αν ο τύπος της συνάρτησης περιέχει κλάσματα, τότε θα απαιτούμε οι παρονομαστές των κλασμάτων να είναι διαφορετικοί του μηδενός.
Το πεδίο ορισμού θα είναι το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$, όπου x_1, x_2, \dots, x_v ρίζες των παρονομαστών.
- Αν ο τύπος της συνάρτησης περιέχει ριζικά, τότε θα απαιτούμε οι υπόριζες ποσότητες να είναι μη αρνητικές (υπόριζο ≥ 0). Το πεδίο ορισμού στη περίπτωση αυτή θα αναγράφεται με τη μορφή διαστήματος.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 3$$

$$\text{ii. } g(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

$$\text{iii. } h(x) = 2x^5 - \frac{1}{x} + \frac{x^3}{x+3}$$

$$\text{iv. } t(x) = \frac{x-1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{v. } \phi(x) = \frac{x+4}{x^3 - 4x} - 2 + \frac{1}{x^2 + 2x}$$

Λύση

- i. Επειδή η f ορίζεται για κάθε τιμή της μεταβλητής x , είναι: $A = \mathbb{R}$.
- ii. Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει: $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$, άρα $A = \mathbb{R} - \{3\}$.
- iii. Για να ορίζεται η συνάρτηση h , πρέπει: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$. Άρα $A = \mathbb{R} - \{0, -3\}$.
- iv. Για να ορίζεται η συνάρτηση t , πρέπει: $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$, άρα $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$.
- v. Για να ορίζεται η συνάρτηση ϕ , πρέπει:

$$\begin{cases} x^3 - 4x \neq 0 \\ x^2 + 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 4) \neq 0 \\ x(x+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ και } x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2 \\ x \neq 0 \text{ και } x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \end{cases} \text{ Άρα } A = \mathbb{R} - \{0, -2, 2\}$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{x-2}$

ii. $g(x) = \sqrt{4-x} - 3x\sqrt{x+2}$

iii. $h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$

iv. $t(x) = \frac{\sqrt{|x|-2}}{x-3}$

v. $\phi(x) = \frac{\sqrt{|x|-x}}{|x|-2}$

vi. $\sigma(x) = \frac{3x-4}{|x|+x} - \sqrt{x^2+1}$

Λύση

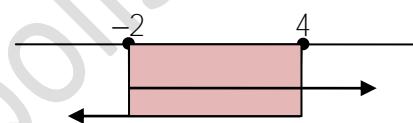
i. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει:

$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2, \text{ άρα } A = [2, +\infty).$$

ii. Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει:

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

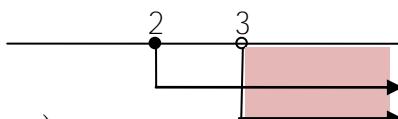
Με συναλήθευση προκύπτει ότι $A = [-2, 4]$.



iii. Για να ορίζεται η συνάρτηση h πρέπει:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

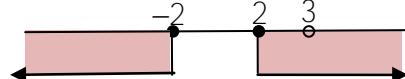
Με συναλήθευση προκύπτει ότι $A = (3, +\infty)$.



iv. Για να ορίζεται η συνάρτηση t πρέπει:

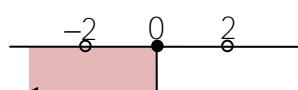
$$\begin{cases} |x|-2 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Με συναλήθευση προκύπτει ότι $A = (-\infty, -2] \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$



v. Για να ορίζεται η συνάρτηση ϕ πρέπει:

$$\begin{cases} |x|-x \geq 0 \\ |x|-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq x \\ |x| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$



Με συναλήθευση προκύπτει ότι: $A = (-\infty, -2) \cup (-2, 0]$

vi. Για να ορίζεται η συνάρτηση ϕ πρέπει:

$$\begin{cases} |x| + x \neq 0 \\ x^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \neq -x \\ x^2 \geq -1 \end{cases} \text{ισχύει}$$

Γνωρίζουμε ότι $|x| = -x$, όταν $x \leq 0$, áρα

για να είναι $|x| \neq -x$, πρέπει $x > 0$. Επομένως $A = (0, +\infty)$.

Όταν $x \leq 0$, τότε
 $|x| = -x \geq x$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5, & -3 < x < 4 \\ \frac{3}{x}, & 4 \leq x \leq 12 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & x \leq 1 \\ x^2 - 2, & x > 1 \end{cases}$

Λύση

i. Επειδή η f ορίζεται όταν $-3 < x < 4$ και όταν $4 \leq x \leq 12$, το πεδίο ορισμού της f είναι: $A = (-3, 4) \cup [4, 12] = (-3, 12]$.

ii. Επειδή η f ορίζεται όταν $x \leq 1$ και όταν $x > 1$, το πεδίο ορισμού της f είναι: $A = (-\infty, 1] \cup (1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

4. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 8x}{x^2 - 4x - \lambda} \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

Λύση

Για να έχει η f πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , πρέπει: $x^2 - 4x - \lambda \neq 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η (1) όμως είναι δευτέρου βαθμού και για να μην μηδενίζεται δεν πρέπει να έχει ρίζες, áρα

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\lambda) < 0 \Leftrightarrow 16 + 4\lambda < 0 \Leftrightarrow 4\lambda < -16 \Leftrightarrow \lambda < -4$$

Εύρεση τιμής της f στο x_0 ($f(x_0)$).

Αντικαθιστούμε στον τύπο της f όπου x το x_0 και κάνουμε τις πράξεις.

Αν ο τύπος της f αποτελείται από κλάδους, τότε κάνουμε την αντικατάσταση σε εκείνον τον κλάδο για το οποίο η f παίρνει την τιμή x_0 .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2), f(0), f(2), f(6)$.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(a\beta) + 4f(a+\beta) - 8a\beta = f(a)f(\beta) + 4$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(a+1) = 8$

Λύση

i. Επειδή η f ορίζεται για κάθε τιμή της μεταβλητής x , είναι $A = \mathbb{R}$.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$f(0) = 0^2 + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$f(2) = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$f(6) = 6^2 + 4 = 36 + 4 = 40$$

$$\text{iii. } f(a\beta) = (a\beta)^2 + 4 = a^2\beta^2 + 4, \quad f(a+\beta) = (a+\beta)^2 + 4 = a^2 + 2a\beta + \beta^2 + 4,$$

$$f(a) = a^2 + 4 \text{ και}$$

$$f(\beta) = \beta^2 + 4.$$

$$\text{Είναι } f(a\beta) + 4f(a+\beta) - 8a\beta = a^2\beta^2 + 4 + 4(a^2 + 2a\beta + \beta^2 + 4) - 8a\beta =$$

$$= a^2\beta^2 + 4 + 4a^2 + 8a\beta + 4\beta^2 + 16 - 8a\beta = a^2\beta^2 + 4a^2 + 4\beta^2 + 20$$

και

$$f(a)f(\beta) + 4 = (a^2 + 4)(\beta^2 + 4) + 4 = a^2\beta^2 + 4a^2 + 4\beta^2 + 16 + 4 = a^2\beta^2 + 4a^2 + 4\beta^2 + 20$$

$$\text{άρα } f(a\beta) + 4f(a+\beta) - 8a\beta = f(a)f(\beta) + 4.$$

$$\text{iv. } f(a+1) = 8 \Leftrightarrow (a+1)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |a+1| = 2 \Leftrightarrow a+1 = \pm 2 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = -3$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 0 \\ x^2 - 2x + 4, & x \geq 0 \end{cases}$.

i. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3), f(2), f(1), f(-1), f(0)$.

ii. Να αποδείξετε ότι: $f(-3) + f(2) + f(1) + f(0) - 5 = f(-1)$.

Λύση

i. Επειδή $-3 < 0$, το $f(-3)$ θα βρεθεί από τον τύπο $f(x) = 3x - 2$.

$$\text{Είναι } f(-3) = 3(-3) - 2 = -11.$$

Επειδή $2 > 0$, το $f(2)$ θα βρεθεί από τον τύπο $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

$$\text{Είναι } f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 4.$$

Επειδή $1 > 0$, το $f(1)$ θα βρεθεί από τον τύπο $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

$$\text{Είναι } f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3.$$

Επειδή $-1 < 0$, το $f(-1)$ θα βρεθεί από τον τύπο $f(x) = 3x - 2$. Είναι

$$f(-1) = 3(-1) - 2 = -5.$$

Επειδή $0=0$, το $f(0)$, θα βρεθεί από τον τύπο $f(x)=x^2-2x+4$.

$$\text{Είναι } f(0)=0^2-2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$\text{ii. Είναι } f(-3)+f(2)+f(1)+f(0)-5=-11+4+3+4-5=-5=f(-1).$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+4, & |x| \leq 1 \\ x^3, & |x| > 1 \end{cases}$

i. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2), f(4), f\left(\frac{1}{2}\right), f(-1), f\left(\frac{3}{2}\right)$.

ii. Να αποδείξετε ότι: $f(4)-8f\left(\frac{3}{2}\right)+2f(-2)=4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(-1)$.

Λύση

i. Επειδή $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ και $|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$, η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3, & x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases} \text{ Οπότε:}$$

- Επειδή $-2 < -1$, είναι $f(-2)=(-2)^3=-8$.

- Επειδή $4 > 1$, είναι $f(4)=4^3=64$.

- Επειδή $-1 < \frac{1}{2} < 1$, είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$.

- Επειδή $1=-1<1$, είναι $f(-1)=-1+4=3$.

- Επειδή $\frac{3}{2} > 1$, είναι $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$.

ii. Είναι $f(4)-8f\left(\frac{3}{2}\right)+2f(-2)=64-8 \cdot \frac{27}{8}+2(-8)=64-27-16=21$ και

$$4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(-1)=4 \cdot \frac{9}{2}+3=18+3=21, \text{ άρα}$$

$$f(4)-8f\left(\frac{3}{2}\right)+2f(-2)=4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(-1).$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Να βρείτε τα

$$f(2), f(-0,43), f(0,33\dots), f(\sqrt{2}), f\left(\frac{1}{2}\right), f(\sqrt{5}).$$

Λύση

Επειδή οι αριθμοί $2, -0,43, 0,3, \frac{1}{2}$ είναι ρητοί, ισχύει ότι:

$$f(2) = f(-0,43) = f(0,33\dots) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Επειδή οι αριθμοί $\sqrt{2}, \sqrt{5}$, είναι άρρητοι, ισχύει ότι $f(\sqrt{2}) = f(\sqrt{5}) = 0$.

9. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$, είναι ίση με:

- i. 0
- ii. 3

Λύση

- i. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- ii. $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

10. Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:

Από το τριπλάσιο ενός αριθμού αφαιρούμε το τετράγωνό του.

- i. Να βρείτε τη συνάρτηση.
- ii. Να βρείτε τον αριθμό για τον οποίο η συνάρτηση είναι ίση με 2.

Λύση

- i. Εστω x ο αριθμός. Το τριπλάσιο του είναι $3x$ και το τετράγωνό του είναι x^2 , άρα η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = 3x - x^2$ και πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.
- ii. $f(x) = 2 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να αποδείξετε ότι: $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{2, 0, -\frac{1}{2}\right\}$.

Λύση

- i. Πρέπει: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

ii. Αρχικά πρέπει $x \neq 0$. Στη συνέχεια για να βρούμε το $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, θα

αντικαταστήσουμε όπου x το $-\frac{1}{x}$. Είναι: $f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{x}\right) + 1}{-\frac{1}{x} - 2}$.

Για να ισχύει η προηγούμενη αντικατάσταση

πρέπει: $-\frac{1}{x} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \neq -2 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$. Τότε:

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{2}{x} + 1}{-\frac{1}{x} - 2} = \frac{-2+x}{x} = \frac{x-2}{-(2x+1)} = -\frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow$$

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{f(x)}$$

Παρατήρηση!

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

12. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x-2) = 5x + 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε τα $f(-1), f(0), f(1)$ και να αποδείξετε ότι $f(-1) + f(1) = 2f(0)$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

Λύση

- i. Για να υπολογίσουμε το $f(-1)$, πρέπει στη θέση του x να τοποθετηθεί κατάλληλος αριθμός τέτοιος, ώστε $x-2 = -1$. Άρα $x = 2-1 = 1$. Επομένως $x = 1$ η αρχική σχέση γίνεται: $f(1-2) = 5 \cdot 1 + 9 \Leftrightarrow f(-1) = 14$. Για $x = 2$, είναι: $f(2-2) = 5 \cdot 2 + 9 \Leftrightarrow f(0) = 19$ και για $x = 3$, είναι: $f(3-2) = 5 \cdot 3 + 9 \Leftrightarrow f(1) = 24$. Είναι $f(-1) + f(1) = 14 + 24 = 38 = 2f(0)$.
- ii. Επειδή η σχέση $f(x-2) = 5x + 9$ ισχύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x , αντικαθιστώντας όπου x το $x+2$, προκύπτει: $f(x+2-2) = 5(x+2) + 9 \Leftrightarrow f(x) = 5x + 10 + 9 = 5x + 19$.

13. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x+y) = 3f(x) + 2f(y) - 5x - 4$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x^3$.

Λύση

- i. Για να προκύψει το $f(0)$, αντικαθιστούμε $x = y = 0$, τότε: $f(0+0) = 3f(0) + 2f(0) - 5 \cdot 0 - 4 \Leftrightarrow f(0) = 5f(0) - 4 \Leftrightarrow 4 = 5f(0) - f(0) \Leftrightarrow 4f(0) = 4 \Leftrightarrow f(0) = 1$
- ii. Για να υπολογίσουμε το $f(x)$, πρέπει στη δοθείσα σχέση να μην υπάρχει το y , οπότε για $y = 0$, είναι: $f(x+0) = 3f(x) + 2f(0) - 5x - 4 \Leftrightarrow f(x) = 3f(x) + 2 \cdot 1 - 5x - 4 \Leftrightarrow 2 + 5x + 4 = 3f(x) - f(x) \Leftrightarrow$

$$5x+6=2f(x) \Leftrightarrow f(x)=\frac{5x+6}{2}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

Ερωτήσεις κατανόησης

14. Να γίνει η αντιστοίχιση

Στάλη Α Συνάρτηση	Στάλη Β Πεδίο ορισμού
1. $f(x)=3x^4-5$	A. $[2, +\infty)$
2. $f(x)=\frac{3x}{x-2}$	B. $(-2, +\infty)$ Γ. \mathbb{R} Δ. \mathbb{R}^*
3. $f(x)=x-\frac{2}{x}$	E. $\mathbb{R}-\{2\}$ Ζ. $\mathbb{R}-\{3\}$
4. $f(x)=\sqrt{x-3}$	H. $[3, +\infty)$
5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$	

15. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2-x}}$ έχει πεδίο ορισμού το:

- A. $[2, +\infty)$ B. $[-2, +\infty)$ Γ. $(-\infty, 2]$ Δ. $(-\infty, 2)$
 E. $\mathbb{R}-\{2\}$

16. Η συνάρτηση $f(x)=x-5$ παίρνει την τιμή 1, όταν:

- A. $x=1$ B. $x=5$ Γ. $x=6$ Δ. $x=25$ E. $x=0$

17. Για τη συνάρτηση $f(x)=2x-1$ το άθροισμα $f(0)+f(1)$ είναι ίσο με:

- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 3 E. 4

Α' ΟΜΑΔΑ

18. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

- i. $f(x)=x^{2012}-1821x^2+2004$ ii. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
 iii. $f(x)=2x+\frac{x}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}$ iv. $g(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4x+3}$
 v. $h(x)=\frac{x}{x^2-7x+10}-\frac{4+x}{x^2-6x+8}$ vi. $t(x)=\frac{3}{|x|}-\frac{x+1}{|x-2|}$

19. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{x-1}$	ii. $g(x) = \sqrt{x+1} - 3\sqrt{3-x}$
iii. $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$	iv. $t(x) = \frac{\sqrt{ x -1}}{ x -2}$
v. $\phi(x) = \frac{\sqrt{3- x }}{ x -1}$	vi. $\sigma(x) = \frac{x^2+2}{ x -x} - \sqrt{x^2+4}$

20. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{\sqrt{ x +x}}{x^2-2x-3}$	ii. $f(x) = \frac{\sqrt{3- x-1 }}{\sqrt{2-\sqrt{x}}}$
iii. $f(x) = \frac{\sqrt{ x-1 +2} - \sqrt{ x -3}}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{11}}}$	

21. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} 4x+1, & 0 \leq x < 5 \\ \frac{3- x }{x+2}, & 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$	ii. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}-x, & x \leq 2 \\ x^3+5x, & 2 < x < 2012 \end{cases}$
---	---

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(0), f(1), f(3)$.
- iii. Να αποδείξετε ότι $f(a+b) = f(a) + f(b) + 2ab - 1$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(a+1) = 0$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-8, & x \leq 1 \\ x^2-8x+7, & x > 1 \end{cases}$.

- i. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3), f(0), f(2), f(-1), f(3)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι: $f(0) + 2f(2) = f(-1) + f(3)$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+3, & |x| \leq 2 \\ 3x-2, & |x| > 2 \end{cases}$.

- i. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-4), f(-2), f(0), f(3)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι: $f(3) + f(-2) + 2f(0) + f(-4) = 0$.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

25. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$, είναι ίση με:
- 0
 - 2.
26. Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:
Από το τετράγωνο ενός αριθμού αφαιρούμε το διπλάσιο του και προσθέτουμε 4
 - Να βρείτε τη συνάρτηση.
 - Να βρείτε τον αριθμό για τον οποίο η συνάρτηση είναι ίση με 3.
27. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x και y cm, έχει περίμετρο 12cm.
 - Να βρείτε την συνάρτηση του εμβαδού του ορθογωνίου σε σχέση με το x .
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της προηγούμενης συνάρτησης.
 - Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου που έχει, επιπλέον, εμβαδόν 5cm^2 .

B' ΟΜΑΔΑ

28. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x+5}{\lambda x^2 + 2} \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

29. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{|x-2| - x}{x^2 - 2x + \lambda} \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x+2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x-2) = 2f(x+1)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 2$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -2f(x)$.
- Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{x}\right)f(x) = -4$.

33. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x+1) = 3x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τα $f(0), f(1), f(2)$ και να αποδείξετε ότι $f(0) + f(2) = 2f(1)$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
34. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x+y) = 2f(x) + f(y) - 2x^3$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$
 - Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x^3$.
35. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(xy) = 2f(x) + f(y) - 4x^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2$
 - Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4x^2 - 2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

14. 1Γ, 2Ε, 3Δ, 4Η, 5Β	15. Δ	16. Γ	17. Α	21. i. $[0,10]$ ii. $(-\infty, 2012)$
18. i. \mathbb{R} ii. $\mathbb{R} - \{1\}$ iii. $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$ iv. $\mathbb{R} - \{1, 3\}$				22. i. \mathbb{R} ii. 3, 1, 1, 7 iv. 3, 1
v. $\mathbb{R} - \{2, 4, 5\}$ vi. $\mathbb{R} - \{0, 2\}$				23. i. -14, -8, -5, -10, -8 ii. 7
19. i. $[1, +\infty)$ ii. $[-1, 3]$ iii. $[-1, 1]$				24. i. -14, 1, 3, 7 iii. αδ. 25. i. 1, 4 ii. 2, 3
iv. $(-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty)$				26. i. $x^2 - 2x + 4$ ii. 1
v. $[-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3]$ vi. $(-\infty, 0)$				27. i. $6x - x^2$ ii. $(0, 6)$ iii. 1 και 5 28. $\lambda \leq 0$
20. i. $\mathbb{R} - \{3\}$, ii. $[0, 4)$, iii. $(11, +\infty)$				29. $\lambda > 1$ 30. i. $\mathbb{R} - \{-2\}$ ii. 3 31. i. \mathbb{R}^*
				32. i. $\mathbb{R} - \{1\}$ 33. ii. $f(x) = 3x + 2$

Στέλιος Μιχαήλογλου – Ευάγγελος Τόλης