

Συντεταγμένες

2ο

15002. Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overline{AB}=(3,-3)$ και $\overline{A\Gamma}=(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$. (Μονάδες 11)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overline{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overline{AB} \perp \overline{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 8)

15854. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,-4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{a}$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του διανύσματος \vec{a} . (Μονάδες 8)

Εσωτερικό γινόμενο

2ο

15852. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(3,2)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$. (Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος \vec{a} . (Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{v}$. (Μονάδες 12)

4ο

15320. Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overline{OA}=\vec{a}$ και $\overline{OB}=\vec{\beta}$, όπου \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\overline{OG}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$. (Μονάδες 9)

ii. $|\overline{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$. (Μονάδες 9)

β) Αν $|\overline{OG}| = |\overline{AB}|$, να δείξετε ότι το $OAGB$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

18520.α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει:

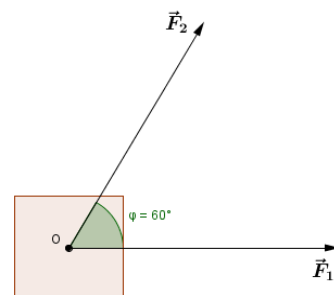
$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1) \quad (\text{Μονάδες } 06)$$

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overline{OA}=\vec{a}$ και $\overline{OB}=\vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$. (Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1). (Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις \vec{F}_1 και \vec{F}_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° .



Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη \vec{F} και να βρείτε το μέτρο της.

(Μονάδες 10)

Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

4ο

15004.α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $\varepsilon_1 : 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία

$\varepsilon_2 : 7x - y - 1 = 0$ είναι $\hat{\varphi} = 45^\circ$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 4)

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι

ευθείες ε_1 και ε_3 .

(Μονάδες 8)

Εμβαδόν τριγώνου

2ο

18733. Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$.

(Μονάδες 9)

Κύκλος

2ο

18749. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5,6)$, $B(1,2)$, $\Gamma(12,2)$ και το ύψος του $A\Delta$, όπου Δ σημείο της $B\Gamma$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$.

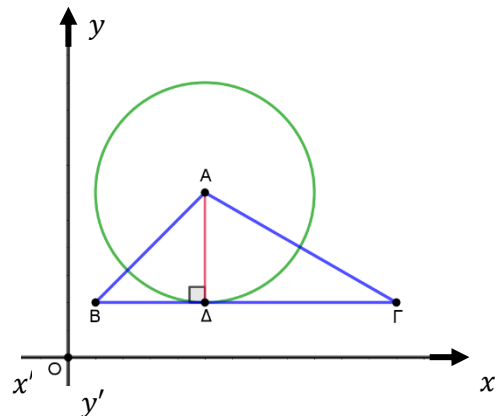
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A , ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο Δ .

(Μονάδες 10)



4ο

18521. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c , ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ .

(Μονάδες 09)

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 10)

20700. Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4), M_1(4,0), M_2(0,4)$. Αν O η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση

$$C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y=8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C . (Μονάδες 9)

Παραβολή

4ο

18245. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

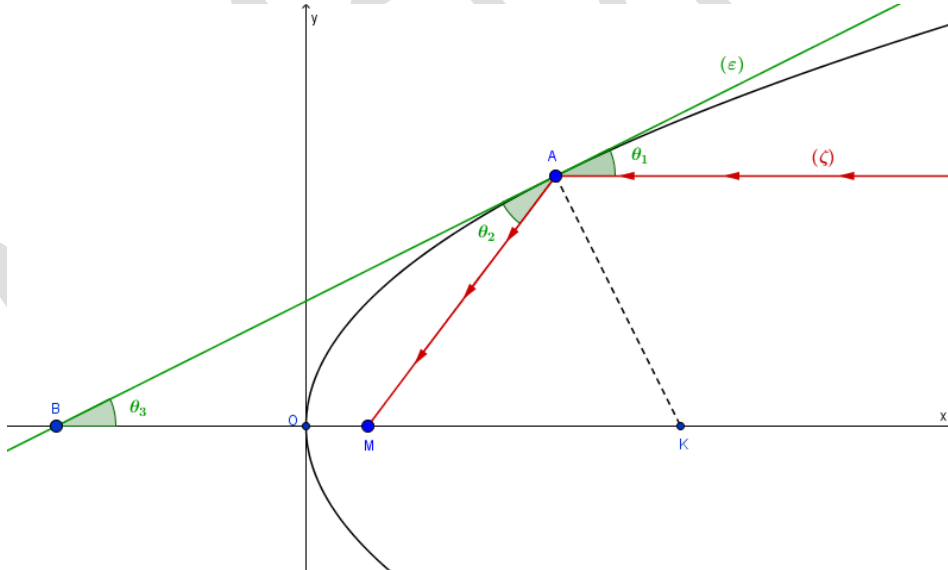
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ . Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E . (Μονάδες 7)

18870. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η AK κάθετη στην (ε) . Μία φωτεινή ακτίνα (ζ) , ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M .



Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

(Μονάδες 06)

Υπερβολή

2ο

17942. Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1,2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C).

(Μονάδες 13)

ASKISOPOLIS